

Le modèle hybride de la structure par terme des primes souveraines de crédit et de liquidité dans la zone UEMOA

Florent Kanga GBONGUE*
Lambert N'Galadjo BAMBA**

Résumé – Dans le contexte actuel, la soutenabilité de la dette publique est devenue une problématique cruciale pour la plupart des pays africains. Pour les pays de la zone UEMOA, cette soutenabilité est affectée par des primes souveraines implicites (PSI) sur le marché financier régional (MFR), qui constituent une mesure essentielle de la perception du risque des émetteurs souverains. Cet article apporte des innovations méthodologiques aux travaux de Merrick (2001) et Gbongué et Bamba (2022) en proposant des modèles hybrides de détermination des PSI indirectes et particulièrement une solution au calibrage de la forme fonctionnelle du risque de liquidité, ce qui permet d'améliorer sensiblement l'estimation du coefficient de variation, ainsi que le taux de recouvrement implicite en cas de défaut de l'émetteur souverain. L'application sur la période 2015-2022 révèle que les structures par terme des primes souveraines de crédit et liquidité des pays de l'UEMOA sont stables lorsqu'elles sont estimées par des modèles hybrides, composés des modèles de Gumbel à l'interpolation et Log-Normale à l'extrapolation, ce qui améliore la visibilité du MFR à moyen et long terme. Ces PSI sont sensibles aux décisions de politique monétaire et aux paramètres de la courbe des taux sans risque, dont le calibrage mérite une attention particulière. Aussi, l'étude recommande-t-elle la poursuite de l'objectif de stabilité des prix par les autorités monétaires, ainsi qu'une meilleure coordination entre les politiques monétaire et budgétaire, comme garant de la stabilité de la courbe des taux de marché et, partant, d'une gestion efficiente des finances publiques dans l'Union.

Classification JEL

E43, E44, G12, H63, O55

Mots-clés

Dette publique
Modèles hybrides
Primes souveraines de crédit et liquidité
UEMOA

* Finair Conseil, Université Felix Houphouët Boigny (UFHB) ; florent.gbongue@gmail.com

** Université Felix Houphouët Boigny (UFHB) ; bamba.ngaladjo@gmail.com

INTRODUCTION

Traditionnellement, les courbes de taux servent à renseigner les investisseurs sur les rendements obligataires, même si elles contiennent également une information sur l'évolution de l'économie (Gbongue, 2019a). Des travaux ont révélé qu'elles se composent de la courbe des taux sans risque, ainsi que la structure par terme des primes de risque (Gbongue, 2019c). Si ces primes de risque sont perceptibles sur les obligations des sociétés, en revanche les nombreuses crises de la dette ont relancé les réflexions autour de l'existence du risque souverain sur les titres publics¹, ainsi que ses effets néfastes sur l'économie (Chen et al., 2013 ; Chen et al., 2015 ; Chen et al., 2016). Aussi, la nature de la relation entre le risque souverain et l'économie est-elle examinée dans de nombreux travaux scientifiques (Balima et al., 2017 ; Groba et al., 2013).

Dans la littérature, le risque souverain est appréhendé par des indicateurs de risque comme les primes souveraines (Karaman, 2022 ; Andrieş et al., 2021) et la notation souveraine publiée par les agences de notation qui renseigne sur la probabilité de défaut et la prime de risque de l'émetteur (Hantzsche, 2022 ; Boumparis et al., 2017). Ainsi, de nombreuses études ont examiné les relations existantes entre le risque souverain, les marchés financiers et la macroéconomie (Coimbra, 2020 ; Kirikkaleli et Gokmenoglu, 2020 ; Arellano et al., 2018 ; Boumparis et al., 2017 ; Georgescu, 2014). Ces études ont révélé que l'aggravation du risque souverain affecte négativement le coût d'emprunt sur les marchés financiers, ce qui se répercute ensuite sur les performances macroéconomiques. De même, les pays faiblement notés sont vulnérables aux incertitudes économiques et financières.

Toutefois, ces analyses font souvent l'objet de critiques, qui se sont intensifiées dans le contexte des crises financières des années 1990 et des années 2000 (Olabisi et Stein, 2015 ; Haspolat, 2015 ; Alsakka et Gwilym, 2013 ; Bissoondoyal-Bheenick, 2012 ; Christopher et al., 2012 ; Treepongkaruna et Wu, 2012 ; Kasimati, 2011 ; Kim et Wu, 2008 ; Reinhart et Rogoff, 2004 ; Ferri et al., 1999 ; Radelet et Sachs, 1998). Par exemple, Radelet et Sachs (1998) suggèrent que les agences étaient incapables de prévoir la crise asiatique de 1997. Ils notent qu'elles avaient des réactions trop tardives et intensifiées aggravant la crise. Aussi, certains auteurs affirment-ils que les agences de notation avaient des comportements pro-cycliques. En d'autres termes, leurs réactions ne font qu'attribuer des bonnes notations en période d'expansion et des rétrogradations en période de crise.

Cette étude se focalise sur les modèles quantitatifs du risque souverain et ses implications macro-financières, à travers le développement des modèles hybrides de la structure par terme des primes souveraines de crédit et de liquidité dans la zone UEMOA (Union Economique et Monétaire Ouest-Africaine). En effet, si l'UMOA-Titres (UT) construit des courbes de taux pour les pays émetteurs de l'Union, en s'appuyant principalement sur les données du marché primaire², en revanche elle ne propose pas une méthodologie de décomposition de ces courbes, capable d'identifier les parts attribuables aux risques de crédit et de liquidité. Une telle situation limite la politique de réduction des asymétries d'information et atténue les efforts consentis pour

¹ Cette situation est aussi rappelée dans les travaux de Merrick (2001), Duffie et al. (2003), Vrugt (2011), etc. Les auteurs soutiennent que les événements de crise de la dette (Russie, Argentine, etc.) ont offert un cadre unique d'appréciation de la volatilité des paramètres de risque, notamment le taux de recouvrement anticipé par les investisseurs.

² L'approche méthodologique proposée par l'UT se compose de trois étapes à savoir : (i) sélection des titres exigibles et collecte des prix ; (ii) retraitement et calcul des taux ; (iii) application d'un modèle de lissage sur les taux calculés, notamment les modèles de Nelson et Siegel et Svensson.

le développement du marché des capitaux dans l'Union. L'intérêt de construire des courbes de taux à partir des données du marché secondaire est essentiel pour le développement des marchés financiers locaux car cela permet de faciliter les échanges grâce à la valorisation des instruments financiers existants, développer de nouveaux instruments financiers et contribuer au développement des marchés dérivés (Kucuksarac et al., 2021). Sur ce point, des travaux récents existent dans l'UEMOA.

Cependant, si certains portent sur l'amélioration de la méthodologie de construction de la courbe des taux sans risque du marché secondaire (Gbongue, 2019a, 2019b), d'autres examinent les différentes méthodes d'estimation des PSI (Gbongue et Bamba, 2022 ; Gbongue, 2019c). La présente étude apporte des innovations importantes à la littérature existante sur la construction des courbes de taux du marché secondaire élargies au risque souverain.

Dans la littérature, l'on rencontre deux principales méthodes d'estimation des PSI : l'approche « directe » et celle dite « indirecte ». La première méthode utilisée, dans Gbongué (2019c) a permis de mettre en lumière l'existence des PSI³ et de proposer par la suite une méthodologie d'estimation, qui s'appuie sur la construction d'une courbe des taux sans risque à une date de cotation, issue d'un nouveau modèle de taux d'intérêt dérivé du modèle de référence de Nelson et Siegel (Gbongue, 2019b). En testant plusieurs modèles⁴ de PSI, il conclut que le modèle de Weibull s'ajuste le mieux aux données de la zone UEMOA. La première méthode a pour principal inconvénient d'aboutir à des PSI agrégés et ne permet pas une décomposition en des primes de crédit et de liquidité. La seconde méthode d'estimation des PSI (qualifiée de « indirecte ») permet de corriger cet inconvénient par la formulation explicite de la structure par terme des primes de crédit et de liquidité, ainsi que des taux de recouvrement implicites (Merrick, 2001; Vrugt, 2011).

Cette seconde méthode d'estimation des PSI, utilisée dans Gbongué et Bamba (2022) leur a permis de proposer un modèle standard de décomposition des PSI, qui aboutit à la formulation explicite de la structure par terme des primes de crédit et de liquidité, ainsi que des taux de recouvrement implicites. Cependant, ils ne parviennent pas à proposer une forme fonctionnelle pour la structure par terme des primes de liquidité et supposent qu'elle est une proportion (30%) de la structure par terme des primes de crédit. Cette hypothèse simplificatrice a facilité le processus de calibrage du modèle global, qui s'est réduit au calibrage du modèle du risque de crédit, ainsi que d'un paramètre de la liquidité.

La présente étude vise à apporter une base technique rigoureuse aux insuffisances des méthodes d'estimation des PSI, et particulièrement, à la résolution de la question de la forme fonctionnelle pour la structure par terme des primes de liquidité. En effet, par rapport aux travaux antérieurs (Gbongué et Bamba, 2022 ; Vrugt, 2011 ; Merrick, 2001), cette étude introduit quelques innovations méthodologiques dans le modèle quantitatif du risque souverain, notamment la décomposition de la structure par terme des PSI. La première innovation porte sur le modèle d'estimation de la structure par terme des primes souveraines de crédit, qui s'appuie désormais sur un modèle hybride combinant deux lois de probabilité extrêmes. Ce choix, qui découle d'un constat empirique, permet de mieux assurer l'interpolation de la courbe des taux primes de crédit sur les maturités observables et l'extrapolation sur les maturités non observables jusqu'à la maturité 100 ans. La seconde innovation concerne le modèle d'estimation de la structure par terme des primes souveraines de liquidité. Ainsi, l'étude apporte une solution technique aux

³ Gbongué (2019c) compare les rendements obligataires observés avec la courbe des taux sans risque du marché secondaire.

⁴ Les modèles de PSI testés sont des modèles extrêmes notamment les modèles de Weibull, Gumbel et Log Normale.

insuffisances du modèle de Gbongué et Bamba (2022), en proposant un modèle mathématique du risque de liquidité, permettant ainsi d'affiner la détermination de la structure par terme des primes souveraines de liquidité dans la zone UEMOA. A cet effet, nous utilisons un modèle hybride combinant deux lois de probabilité extrêmes, dans l'optique de s'assurer de la stabilité de la courbe des primes souveraines de liquidité sur l'ensemble des maturités, jusqu'à la maturité 100 ans. Le choix des modèles hybrides pour l'estimation des primes de risque est ainsi novateur pour les marchés financiers en développement⁵, qui sont souvent confrontés au manque d'information sur les maturités à moyen et long terme. Le recours à ces modèles hybrides constitue donc une solution technique pour une meilleure visibilité du marché financier régional de l'UEMOA, contribuant ainsi à lutter contre les asymétries d'information.

L'enjeu pour des économies aux marchés financiers en développement est important. Il s'agit d'offrir l'opportunité aux États d'optimiser leurs finances publiques⁶ à travers la détermination du coût optimal de financement en monnaie locale sur le marché financier local. A cet effet, la construction de la courbe des PSI contribue à déterminer la structure par terme des taux d'intérêt des pays émetteurs, en tenant compte de la perception du risque souverain implicite des investisseurs. De manière concrète, cette structure par terme pourrait servir de référence dans la formation des taux d'intérêt de l'ensemble des instruments financiers, ainsi que des dérivés de taux. De plus, elle contribue à améliorer les modèles de valorisation en assurance et finance, ainsi qu'à mieux structurer la mobilisation des ressources, en conformité avec la stratégie de viabilité de la dette publique. De telles pratiques participent donc à l'élargissement de la base des investisseurs, qui est fondamentale au développement des marchés financiers dans les pays à faible revenu. Elles permettront d'accroître le volume des transactions, d'améliorer la liquidité des titres, de réduire les risques à travers le principe de diversification du portefeuille, etc. Sur ce point, les autorités ont intérêt à construire des courbes de taux pertinentes pour lutter contre les asymétries d'information, dans l'optique d'attirer de nouveaux investisseurs. Ces courbes de taux sont beaucoup attendues par ces investisseurs, qui les utilisent pour affiner leur politique d'investissement et/ou de désinvestissement sur les marchés financiers. Au total, la construction de courbes de taux pertinentes peut contribuer à renforcer la gestion des finances publiques, par la réalisation des économies d'échelle sur la charge d'intérêt de la dette publique.

L'article est organisé comme suit. La section 1 présente la revue de littérature. La section 2 s'intéresse aux aspects méthodologiques. La section 3 porte sur l'analyse des résultats empiriques et leurs implications.

1. REVUE DE LITTÉRATURE

Le risque souverain, qui mesure la probabilité de défaut d'un État, est un indicateur central dans les décisions d'investissement⁷. Sur les marchés financiers, la perception

⁵ A notre connaissance, aucune publication scientifique ne fait recours aux modèles hybrides pour la décomposition de la structure par terme des PSI.

⁶ Dans la zone UEMOA, les gestionnaires de la dette publique sont confrontés à un environnement difficile, caractérisé par de graves vulnérabilités budgétaires et des niveaux d'endettement élevés. Le taux de pression fiscale se situe autour de 12,8%, largement en deçà de la norme communautaire de 20%, couplé à des ratios d'endettement pouvant atteindre 60% du produit intérieur brut (PIB).

⁷ Le risque souverain apparaît *naturellement* dans les dispositifs prudentiels des banques (Bâle II et III) et des sociétés d'assurance (Solvabilité II). Dans ces dispositifs, l'évaluation du risque souverain se fait au moyen de la détermination de ses paramètres de risque. Ces derniers se composent principalement de la probabilité de défaut (PD), la perte en cas de défaut (LGD) et

du risque souverain est appréhendée à travers des indicateurs de risque à savoir les primes de risque (Karaman, 2022 ; Andrieş et al., 2021 ; Kucuksarac et al., 2021 ; Bevilacqua et al., 2020 ; O'Sullivan et Papavassiliou, 2020) et la notation⁸ publiée par les agences de notation (Hantzsch, 2022 ; Kim et Wu, 2008 ; Butler et Fauver, 2006 ; Afonso, 2003). Selon Afonso (2003), la notation de la dette publique souveraine est en quelque sorte une évaluation de la situation économique, financière et politique d'une économie. Plus précisément, la cote de risque des pays est un indicateur de la probabilité pour un emprunteur souverain de ne pas rembourser ses dettes (Cosset et Roy, 1991). Butler et Fauver (2006) et Kim et Wu (2008) démontrent que les notations souveraines prennent en considération la transparence, entre autres facteurs. Par conséquent, les notations souveraines sont considérées comme un bon indicateur du degré de transparence et du risque futur représenté par le pays.

Ces indicateurs de risque sont utilisés dans la littérature pour analyser les relations macroéconomiques et financières, notamment celles pouvant exister entre le risque souverain, la finance et la macroéconomie (Lozano-Espitia et Arias-Rodríguez, 2022 ; Gilchrist et al., 2022 ; Coimbra, 2020 ; Kirikkaleli et Gokmenoglu, 2020 ; Georgescu, 2014 ; Arellano et al., 2018 ; Chen et al., 2016 ; Boumparis et al., 2017). Gilchrist et al. (2022) soutiennent que les marchés financiers internationaux ont des effets sur le risque souverain. En s'appuyant sur les données obligataires de 50 pays entre 1995 et 2020, ils concluent qu'une augmentation du risque financier mondial entraîne un élargissement important et persistant des écarts de taux des obligations souveraines, dont les effets sont plus prononcés pour les obligations souveraines de qualité spéculative. Dans cette idée, Boumparis et al. (2017) montrent que les incertitudes économiques ont un impact négatif important sur les pays les moins bien notés. Ils en concluent que la qualité de la réglementation et la compétitivité ont un impact important sur les pays faiblement notés. En investiguant la relation entre la politique fiscale et la politique monétaire par le canal du risque de crédit, Lozano-Espitia et Arias-Rodríguez (2022) constatent que la politique budgétaire affecte le risque souverain de la Colombie, dont l'information se propage ensuite sur le taux de change et les anticipations d'inflation.

Dans le contexte des crises, ces relations macro-financières sont également examinées dans des études récentes (González-Velasco et al., 2022 ; Hao et al., 2022 ; Augustin et al., 2021 ; Kucuksarac et al., 2021 ; Bevilacqua et al., 2020 ; O'Sullivan et Papavassiliou, 2020). Ainsi, Augustin et al. (2021) évaluent dans le contexte de la crise sanitaire Covid-19 l'importance de la capacité fiscale d'un pays dans l'explication de la relation entre les chocs de croissance économique et le risque de défaut souverain. S'appuyant sur un échantillon de 30 pays développés, ils constatent une sensibilité positive et significative du risque de défaut souverain à l'intensité de la propagation du virus, pour les gouvernements fiscalement contraints. Ils concluent que les marchés financiers pénalisent les souverains ayant une faible marge de manœuvre budgétaire, ce qui nuit à leur résilience aux chocs externes. De même, González-Velasco et al. (2022) étudient l'impact du risque souverain sur le risque

de l'exposition au défaut (EAD). En pratique, ils peuvent être fixés par le régulateur (approche standard) ou bien laissés à l'appréciation des banques, qui les déterminent dans le cadre des modèles internes (approche IRB). Par exemple, dans l'approche standard, les expositions sur les emprunteurs souverains et les banques centrales sont pondérées en fonction des risques conformément à la table de pondération fondée sur les notations, voir BIS [2017] « Le traitement réglementaire des expositions au risque souverain », comité Bâle sur le contrôle bancaire.

⁸ La notation est déterminée par les agences de notation à partir d'une analyse fine d'un ensemble d'indicateurs macroéconomiques (PIB par habitant, inflation, dettes publiques, recettes fiscales, historique des défauts, etc.).

bancaire de la zone euro lors de la pandémie de Covid-19. En s'appuyant sur des méthodes économétriques sophistiquées⁹, ils concluent qu'une augmentation du risque souverain a eu un impact sur le risque bancaire dans la zone euro mais qu'il n'y a aucune preuve que le risque souverain dans les pays de la périphérie de la zone euro se transmette au risque bancaire dans les pays du noyau dur pendant la crise Covid-19. Hao et al. (2022) analysent les effets de la crise Covid-19 sur le risque souverain de crédit. Ils constatent que le risque de crédit souverain (mesuré par les écarts de swap de défaut de crédit souverain) augmente significativement après la pandémie Covid-19, et l'effet négatif est plus prononcé pour le risque de crédit à court terme. Si cette augmentation du risque résulte de la crainte d'une contraction de la consommation globale (en plus de la capacité budgétaire et de la volatilité des exportations), en revanche, l'on observe qu'elle s'atténue par des stimuli fiscaux stabilisant la consommation. En conséquence, les auteurs concluent que la contraction et la reprise de la consommation devraient être des préoccupations majeures des gouvernements en période de crise.

Les travaux exposés supra démontrent que le risque souverain affecte l'environnement économique et financier, ce qui explique a priori son évaluation par les investisseurs, à travers des modèles quantitatifs du risque souverain. La littérature révèle deux approches d'évaluation du risque de défaut souverain. La première approche est la classe des modèles macroéconomiques découlant du modèle de référence d'Eaton et Gersovitz (1981)¹⁰. Ce modèle de référence a été utilisé pour l'analyse des crises de la dette (Arellano, 2008 ; Aguiar et Gopinath, 2006). Plus récemment, des études l'ont appliqué à la crise de la dette européenne (Paluszynski, 2023 ; Bocola et al., 2019 ; Bocola et Dovis, 2019 ; Arellano et al., 2018 ; Salomao, 2017). Ainsi, Bocola et al. (2019) soulignent que le modèle d'Eaton et Gersovitz (1981) ne parvient pas, dans sa version standard, à correspondre à la crise de la dette dans les pays d'Europe du sud. Toutefois, ils démontrent que l'application de ce modèle à la dette publique plutôt qu'à la dette extérieure améliore considérablement la capacité du modèle à expliquer la dynamique des écarts de taux d'intérêt pour ces pays. Passadore et Xu (2022) revisitent le modèle d'Eaton et Gersovitz (1981) en incorporant les frictions de liquidité du marché obligataire secondaire. Ce modèle est plus amélioré car il intègre également la dette à long terme (Arellano et Ramanarayanan, 2012), ainsi que le taux de recouvrement (Yue, 2010).

La seconde approche est constituée par la classe des modèles de la finance quantitative. Andritzky (2006) fait un état des lieux des travaux existants dans ce sens et propose de les regrouper en deux catégories, selon la méthode utilisée pour modéliser la probabilité d'un événement de crédit à une certaine date. La première catégorie porte sur les modèles structurels, dont l'idée principale est basée sur l'article fondateur de Merton (1974), qui considère la défaillance d'une entreprise comme une situation dans laquelle les actifs sont insuffisants pour régler les obligations de dette arrivant à échéance. Cette approche est étendue par l'introduction des modèles du premier temps de passage, qui reposent sur l'idée suivante : le défaut peut avoir

⁹ L'approche économétrique utilisée fait intervenir les tests de causalité de Granger, la matrice de débordement et les modèles BEKK-GARCH (*Baba, Engle, Kraft and Kroner's generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*).

¹⁰ Dans sa forme la plus simple, ce modèle considère le problème de décision d'un gouvernement qui fait face à un risque de revenu et émet une dette non-contingente avec l'option de défaut. L'option de défaut est plus valable lorsque le revenu du gouvernement est faible, ses obligations en matière de dette élevées, ou les deux. Par conséquent, les flux de revenus et les remboursements de la dette sont des variables clés pour expliquer les épisodes de défaut dans cette classe de modèles.

lieu à tout moment quand la valeur de l'entreprise descend en dessous d'un seuil¹¹. Dans cette catégorie, l'on peut citer les travaux de Black et Cox (1976), Brennan et Schwartz (1977, 1980), Geske (1977), Leland (1994), Longstaff et Schwartz (1995), Leland et Toft (1996), Zhou (1997), etc.

L'application des modèles structurels à la quantification du risque souverain requiert d'attribuer une valeur d'entité à un pays. Par exemple, certains auteurs s'appuient sur des indicateurs macroéconomiques traduisant le degré ou la capacité d'endettement¹². Ainsi, Karmann et Maltritz (2002) utilisent les réserves de change et les exportations nettes comme indicateur de la capacité de remboursement, qui est supposé suivre un processus d'Ito. En utilisant les cotations du marché des taux sans risque et primes de risque pays, ils calibrent un modèle de type Merton grâce à la formule de Black et Scholes pour une option de vente. Par contre, Gray et al. (2007) proposent une autre approche pour mesurer, analyser et gérer le risque souverain, basée sur la théorie et la pratique de l'analyse moderne des créances contingentes (CCA). De même, Lai (2016) évalue le risque de crédit des ménages et du gouvernement à Singapour en utilisant l'approche des CCA, dans le but d'estimer leur probabilité de défaut sur la base de la valeur de marché de leurs actifs et de leurs passifs. Plus récemment, Jain et al. (2020) présentent une application de l'approche des CCA pour mesurer la valeur implicite des actifs et leur volatilité dans le cas des Fidji. Les résultats empiriques, bien que cohérents, n'indiquent aucune détresse de la dette souveraine pour les Fidji.

La seconde catégorie des modèles de la finance quantitative comprend les modèles à forme réduite, dans lesquels le risque de défaut est considéré comme un processus exogène, ce qui évite donc de spécifier l'obligation de paiement et la capacité d'endettement. Si le risque concerne uniquement la probabilité de défaut de crédit, alors l'approche est fondée sur les modèles à intensité¹³. Une littérature abondante existe sur ce sujet, mettant en évidence l'existence d'une prime de risque sur les obligations souveraines, au regard des crises de la dette observées dans plusieurs pays : Pages (2001), Merrick (2001), Merrick (2005), Duffie et al. (2003), Vrugt (2011), Bernardo et Caio (2008), Berardi et al. (2004). Ainsi, Pages (2001) estime un modèle à deux processus selon la spécification du modèle de Cox-Ingersoll-Ross (1985). Il constate que la structure par terme des PSI présente une forme particulière, matérialisée par des primes de risque en forte hausse au cours des deux premières années et un aplatissement par la suite. Merrick (2001) propose un modèle capable de déterminer simultanément le taux de recouvrement RV et la structure par terme des probabilités de défaut de crédit π_t en univers risque neutre pour la Russie et l'Argentine. Ce modèle est appliqué sur les *Eurobonds* en dollar durant la crise de défaut de la Russie en 1998¹⁴. Merrick (2005) vient combler l'hypothèse linéaire de la probabilité de défaut proposée dans Merrick (2001), en recourant à une version simplifiée du modèle de Nelson-Siegel à deux facteurs. L'application de ce modèle sur les données de l'Argentine, durant la crise de 1998, fournit des résultats meilleurs. Duffie et al. (2003) proposent un modèle affiné plus

¹¹ Ce seuil est souvent considéré constant ou déterministe. Il est choisi par les gérants de l'entreprise suivant des critères économiques.

¹² Kulatilaka et Marcus (1987) modélisent la capacité d'endettement en supposant que le PIB suit un processus stochastique. En remarquant que le service de la dette est considéré comme un frein à la croissance future du PIB, ils soutiennent qu'un pays décide de faire défaut lorsque le coût du défaut après sanction devient inférieur à la croissance du PIB à laquelle il renonce.

¹³ Le processus d'intensité est assimilable à la probabilité instantanée d'un événement de crédit, dans le contexte de l'hypothèse risque neutre.

¹⁴ Ainsi, les écarts de taux peuvent être déduits à partir de la relation de Duffie et Singleton (1999).

riche pour le risque souverain. En l'appliquant sur les données russes lors de la crise de 1998, ils constatent qu'il est difficile d'expliquer les déviations considérables des prix de certaines obligations pendant cette période turbulente. Vrugt (2011) propose un modèle presque identique au modèle de Merrick (2001), avec quelques différences sur la formulation mathématique de la probabilité de défaut π_t et de la fonction de survie S_t . En l'appliquant sur les obligations de la Grèce, il constate une hausse de la probabilité de défaut (PD) qui est passée de 5% à 40% sur la période avril-mai 2010. Toutefois, Vrugt soutient que l'aide financière apportée par l'Union européenne, a contribué à améliorer le risque souverain de la Grèce, en ce sens que la PD est redescendue en dessous de 10 %, avec un taux de recouvrement autour de 40 % et 60 %.

Longstaff (2004) montre l'existence des primes de liquidité dans les bons du Trésor, par comparaison aux prix des obligations émises par Refcorp (un organisme du gouvernement américain), qui peuvent avoisiner 15% de la valeur de certains bons du Trésor. Dans Bernardo et Caio (2008), les auteurs analysent la perception du risque souverain dans le contexte brésilien en proposant un modèle dynamique paramétrique (en l'absence d'opportunité d'arbitrage) pour déterminer le taux de recouvrement RV et la structure par terme des probabilités de défaut π_t en se basant sur les travaux de Duffie et Singleton (1999). Avec un taux d'erreur inférieur à 0,08 %, ils concluent que le modèle est adapté pour tarifier de nouvelles émissions. A partir de 3 ans de données quotidiennes sur 152 sociétés, Elkamhi et al. (2014) estiment les probabilités de défaut et les taux de recouvrement à l'aide d'un modèle d'évaluation quadratique. Ils constatent que les probabilités de défaut à 5 ans estimées sont en moyenne 67% plus élevées que les probabilités de défaut obtenues en utilisant l'hypothèse standard de 40% de recouvrement. Chang et Orosi (2017) proposent une méthode capable d'extraire les probabilités de défaut des prix des options sur action et qui fournisse un taux de recouvrement positif. Conrad et al. (2020) proposent une nouvelle méthode d'estimation des probabilités de défaut à partir de données sur les options actions. Ils constatent que les PD qui en résultent sont fortement corrélées avec les estimations des PD extraites des spreads de *credit default swaps* (CDS), ce qui suppose des pertes constantes en cas de défaut. Ils concluent que les PD implicites des options sont plus élevées en période de mauvaise conjoncture économique et pour les entreprises dont la cote de crédit et la situation financière sont moins bonnes. Enfin, l'étude de Abid et al. (2020) présente une méthodologie de détermination de la PD implicite et de la notation implicite en s'appuyant sur la base des spreads de CDS. Ils constatent que les notations implicites basées sur les CDS sont inférieures à celles basées sur l'approche Thomson Reuters, ce qui peut s'expliquer en partie par le fait que les probabilités du monde réel sont plus faibles que celles fondées sur un cadre neutre au risque.

Il existe donc une bonne palette de modèles d'estimation du risque de défaut souverain mais qui doivent être contextualisés. Notre travail se situe dans la seconde approche, qui correspond à la classe des modèles de la finance quantitative. Ce choix vise à fournir un outil capable d'évaluer finement la prime de risque souveraine en monnaie locale, afin de soutenir la stratégie de mobilisation des ressources à moindre coût sur les marchés financiers. Cette étude fait partie des applications macroéconomiques de la courbe des taux dans la zone UEMOA. Elle répond doublement aux problématiques de mobilisation optimale des ressources externes sur le marché financier régional en tenant compte de la perception du risque souverain implicite des investisseurs et du taux de recouvrement optimal des émetteurs souverains qui n'alarme pas les investisseurs. Elle s'inscrit dans le prolongement des travaux de Merrick (2001) et de Gbongue et Bamba (2022) et apporte des innovations méthodologiques à la méthode indirecte d'estimation de la structure par terme des PSI, en formulant un modèle hybride composé de deux lois de probabilité extrême, capable

de reconstituer fidèlement l'ensemble des points de la courbe des primes souveraines de crédit et de liquidité, ce qui améliore également l'estimation du taux de recouvrement implicite en cas de défaut de l'émetteur.

2. MÉTHODOLOGIE

Les modèles de décomposition de la structure par terme des PSI visent à estimer les structures par terme des primes de crédit et de liquidité. Ils s'appuient sur la modélisation fine de la courbe des taux sans risque à une date de cotation t . Ces modèles de décomposition permettent de déterminer les PSI par une approche qui est dite « indirecte », en ce sens qu'elles sont obtenues par la sommation des structures par terme des primes de crédit et de liquidité (Stander, 2005). Cette section revisite la méthodologie de décomposition des PSI, en apportant une solution de calibrage aux modèles des courbes de taux sans risque, des primes de crédit et de liquidité, ainsi que des taux de recouvrement implicites, utilisés dans les réglementations internationales pour analyser le risque souverain.

2.1. Le cadre général de la valorisation des obligations en monnaie locale

Les crises de la dette ont relancé le débat sur l'existence du risque souverain. La prise en compte de ce risque modifie naturellement la valorisation des obligations souveraines. Sur les marchés financiers, la valorisation consiste à déterminer la valeur théorique d'un instrument financier. En présence de défaut de l'émetteur, cette valeur théorique se définit comme étant la somme de l'ensemble des flux probables actualisés.

Considérons une obligation k d'un émetteur souverain i qui arrive à échéance à la date t' . À la date de cotation t , la prise en compte du risque souverain induit une incertitude dans le paiement futur des flux financiers $CF_t^{k,i}$, ainsi que la liquidité des titres publics. Sur le premier point, les flux $CF_t^{k,i}$ deviennent des variables aléatoires $\tilde{F}_t^{k,i}$. La valeur espérée de ce flux aléatoire $E(\tilde{F}_t^{k,i})$, sachant l'information disponible $\mathcal{S}_t$, est équivalente au produit du flux financier $CF_t^{k,i}$ par sa probabilité de verser ce flux B_t^{PSI} , c'est-à-dire $E(\tilde{F}_t^{k,i} | \mathcal{S}_t) = CF_t^{k,i} \times B_t^{PSI}$. Sur le second point, les primes de liquidité (LS) permettent de tenir compte de la liquidité des titres, ce qui implique que $B_t^{PSI} = B_t^{CS} \times B_t^{LS}$. Dans ce contexte, la valeur théorique $\hat{P}_0^{k,i}(t, \theta', \zeta, \zeta'_1, \zeta'_2)$ de l'obligation souveraine en monnaie locale s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \underbrace{P_0^{k,i}(t, \theta')}_{\text{Prix observé}} &= \underbrace{\hat{P}_0^{k,i}(t, \theta', \zeta, \zeta'_1, \zeta'_2)}_{\text{Valeur Théorique}} \\ &= \underbrace{P_c^{k,i}(t, \theta')}_{\text{Prix coté}} + \underbrace{AC_t^{k,i}}_{\text{Intérêts courus}} = \sum_{m=1}^{\theta' = \left\lceil \frac{(t'-t)}{365} \right\rceil + 1} CF_t^{k,i} \times B_t^{Rf}(m, \zeta) \times B_t^{CS}(m, \zeta'_1) \times B_t^{LS}(m, \zeta'_2) \quad (1) \\ &= \sum_{m=1}^{\theta' = \left\lceil \frac{(t'-t)}{365} \right\rceil + 1} CF_t^{k,i} \times e^{-m \times Rf_t(m, \zeta)} \times e^{-m \times CS_t(m, \zeta'_1)} \times e^{-m \times LS_t(m, \zeta'_2)} \end{aligned}$$

L'équation (1) révèle que cette valorisation dépend des quantités B_t^{Rf} , B_t^{CS} et B_t^{LS} , qui sont les facteurs d'actualisation découlant du calibrage des modèles de taux sans risque $Rf_t(m, \zeta)$, primes de crédit $CS_t(m, \zeta'_1)$ et de liquidité $LS_t(m, \zeta'_2)$. La valeur

théorique des obligations souveraines s'obtient donc de l'estimation du vecteur de paramètres $\mu = (\varsigma, \varsigma'_1, \varsigma'_2)$.

2.2. Modèle et calibrage de la structure par terme des taux sans risque

Cette sous-section vise à déterminer la courbe des taux zéro-coupon, sous l'hypothèse d'absence de défaut de l'émetteur, dénommée la structure par terme des taux sans risque. L'approche méthodologique retenue provient des travaux de Gbongue (2019a et 2019b) qui s'appuie sur les fondamentaux de Nelson et Siegel (1987).

2.2.1. Le modèle

Ce modèle s'appuie sur les données du marché financier secondaire, composé de N obligations souveraines en circulation. Il est utilisé pour déterminer la structure par terme des taux sans risque, qui est une courbe implicite des taux. Rappelons que ces courbes implicites sont extraites indirectement des cotations de marché des instruments financiers comme les obligations et les swaps. Soit la valeur théorique $\hat{P}_1^{k,i}(t, \theta, \varsigma)$ d'une obligation k de l'émetteur souverain i , qui arrive à échéance à la date t' . En l'absence d'opportunité d'arbitrage, $\hat{P}_1^{k,i}$ est équivalent à la somme des flux $CF_t^{k,i}$ actualisés aux taux sans risque Rf_t pour les maturités m allant de 1 à

$$\theta' = [\theta] + 1 = \left\lceil \frac{(t' - t)}{365} \right\rceil + 1 :$$

$$\begin{aligned} \underbrace{P_1^{k,i}(t, \theta')}_{\text{Prix observé}} &= \underbrace{\hat{P}_1^{k,i}(t, \theta', \varsigma)}_{\text{Valeur Théorique}} \\ \underbrace{P_c^{k,i}(t, \theta') + AC_t^{k,i}}_{\text{Prix observé}} &= \underbrace{\sum_{m=1}^{\theta'} CF_t^{k,i}(m)}_{\text{Valeur Théorique}} \times \underbrace{B_t^{Rf}(m, \varsigma)}_{\text{Prix zéro-coupon}} \\ &= \sum_{m=1}^{\theta'} CF_t^{k,i}(m) \times e^{-m \times Rf_t(m, \varsigma)} \end{aligned} \quad (2.a)$$

L'opérateur $[]$ désigne la partie entière. L'équation (1) révèle implicitement que les flux $CF_t^{k,i}$ sont certains. De plus, les flux versés $CF_t^{k,i}$ et les intérêts courus $AC_t^{k,i}$ suivent les relations suivantes :

$$\begin{cases} CF_t^{k,i}(1) = \dots = CF_t^{k,i}([\theta]) = C^{k,i} \text{ et } CF_t^{k,i}([\theta] + 1) = C^{k,i} + FV^{k,i} \\ AC_t^{k,i} = C^{k,i} \times \frac{t - t_{av}^{k,i}}{t_{ap}^{k,i} - t_{av}^{k,i}} \end{cases} \quad (2.b)$$

avec $C^{k,i}$ la valeur du coupon versé par l'obligation k de l'émetteur souverain i ; $FV^{k,i}$ la valeur de remboursement de l'obligation k de l'émetteur souverain i ; $t_{av}^{k,i}$ la date de versement du coupon précédent de l'obligation k de l'émetteur souverain i ; $t_{ap}^{k,i}$ la date de versement du coupon suivant de l'obligation k de l'émetteur souverain i .

Le vecteur ς représente les paramètres à estimer de la courbe des taux sans risque Rf_t . Cette dernière est calculée en intégrant le taux forward instantané δ_t^{Rf} (appelé aussi « force d'intérêt »), d'une obligation souveraine sans risque de défaut de maturité m , selon la relation suivante :

$$Rf_t(m, \varsigma) = \frac{1}{m} \int_0^m \delta_t^{Rf}(u, \varsigma) du \quad (3.a)$$

S'appuyant sur le modèle de Gbongué (2019b), le taux d'intérêt instantané δ_t^{Rf} ¹⁵ suit la dynamique suivante en temps continu :

$$\delta_t^{Rf}(m, \varsigma_t) = L_t^{Rf} - S_t^{Rf} \exp\left(-\frac{k_{1,t}}{\tau_{1,t}} m\right) + C_t^{Rf} \left(\frac{k_{2,t}}{\tau_{2,t}} m\right) \exp\left(-\frac{k_{2,t}}{\tau_{2,t}} m\right) \quad (3.b)$$

L'intégration de cette fonction sur la période $[0; m]$ permet d'obtenir une expression fermée de la courbe des taux sans risque en fonction de ses facteurs (Gbongué, 2019a) :

$$\begin{aligned} Rf_t(m, \varsigma_t) &= L_t^{Rf} - S_t^{Rf} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{k_{1,t}}{\tau_{1,t}} m\right)}{\frac{k_{1,t}}{\tau_{1,t}} m} \right] + C_t^{Rf} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{k_{2,t}}{\tau_{2,t}} m\right)}{\frac{k_{2,t}}{\tau_{2,t}} m} - \exp\left(-\frac{k_{2,t}}{\tau_{2,t}} m\right) \right] \\ &= \underbrace{\left(1, \frac{1 - \exp\left(-\frac{k_{1,t}}{\tau_{1,t}} m\right)}{\frac{k_{1,t}}{\tau_{1,t}} m}, \frac{1 - \exp\left(-\frac{k_{2,t}}{\tau_{2,t}} m\right)}{\frac{k_{2,t}}{\tau_{2,t}} m} - \exp\left(-\frac{k_{2,t}}{\tau_{2,t}} m\right) \right)}_{\Delta} \times \underbrace{\begin{pmatrix} L_t \\ -S_t \\ C_t \end{pmatrix}}_{\tilde{F}_t} \end{aligned} \quad (3.c)$$

On remarque que la courbe des taux sans risque supra est aussi gouvernée par trois facteurs à savoir le niveau L_t^{Rf} , la pente S_t^{Rf} et la courbure C_t^{Rf} , comme dans le modèle de Nelson et Siegel (1987). Rappelons que sa modélisation fait intervenir un second paramètre de forme $\tau_{2,t}$, qui a pour but d'améliorer la flexibilité et la précision de ce modèle. Nous déduisons l'expression fermée de la valeur théorique d'une obli-

¹⁵ En zone UEMOA, Gbongué (2019b) propose une approche pertinente de modélisation du taux forward instantané δ_t^{Rf} , qui s'appuie sur les fondamentaux du modèle de référence de Nelson et Siegel (1987). Ce nouveau modèle améliore la construction de la courbe des taux sans risque dans l'union. En effet, les coefficients $k_{1,t}$ et $k_{2,t}$ affectés aux maturités servent principalement à capter les distorsions de la courbe, même dans les périodes anormales. De plus, l'ajout d'un second paramètre de forme $\tau_{2,t}$, permet d'améliorer la précision et la flexibilité de la courbe, en réduisant de manière significative les erreurs d'estimation des prix. Par conséquent, il est adapté aux situations de crises, en retenant des valeurs des coefficients $k_{1,t}$ et $k_{2,t}$ supérieures à 2 et 5.

gation souveraine sans risque de défaut $P_1^{k,i}(t, \theta', \varsigma)$ en fonction des paramètres à estimer $\varsigma_t = (L_t^{Rf}, -S_t^{Rf}, C_t^{Rf}, \tau_{1,t}, \tau_{2,t}, k_{1,t}, k_{2,t})$:

$$\begin{aligned} \hat{P}_1^{k,i}(t, \theta, \varsigma) &= \sum_{m=1}^{\theta} C^{k,i} \times B_t^{Rf}(m, \varsigma) + 100 \times B_t^{Rf}([\theta] + 1, \varsigma) \\ &= \sum_{m=1}^{\theta} C^{k,i} \times e^{-m \times \left(L_t^{Rf} - S_t^{Rf} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{k_{1,t}}{\tau_{1,t}} m\right)}{\frac{k_{1,t}}{\tau_{1,t}}} \right] + C_t^{Rf} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{k_{2,t}}{\tau_{2,t}} m\right)}{\frac{k_{2,t}}{\tau_{2,t}}} - \exp\left(-\frac{k_{2,t}}{\tau_{2,t}} m\right) \right] \right)} \\ &\quad - ([\theta] + 1) \times \left(L_t^{Rf} - S_t^{Rf} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{k_{1,t}}{\tau_{1,t}} ([\theta] + 1)\right)}{\frac{k_{1,t}}{\tau_{1,t}}} \right] + C_t^{Rf} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{k_{2,t}}{\tau_{2,t}} ([\theta] + 1)\right)}{\frac{k_{2,t}}{\tau_{2,t}}} - \exp\left(-\frac{k_{2,t}}{\tau_{2,t}} ([\theta] + 1)\right) \right] \right) \\ &\quad + 100 \times e \end{aligned} \quad (3.d)$$

2.2.2. Le calibrage

Le calibrage de la courbe des taux sans risque consiste à minimiser les erreurs d'estimation des prix. En clair, il s'agit de minimiser le carré de l'écart du prix observé $P_1^{k,i}(t, \theta')$ et du prix théorique $\hat{P}_1^{k,i}(t, \theta', \varsigma)$ pondéré par l'inverse de la durée modifiée $D^{k,i}$. En supposant que nous avons N_i obligations pour chacun des N émetteurs sur le marché secondaire, le problème d'optimisation à résoudre à chaque date de cotation t se définit comme suit :

$$\begin{aligned} \underset{\varsigma_t}{Min} H_1(\hat{P}) &= \underset{\varsigma_t = (L_t^{Rf}, -S_t^{Rf}, C_t^{Rf}, \tau_{1,t}, \tau_{2,t}, k_{1,t}, k_{2,t})}{Min} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N_i} \left(\frac{P^{k,i}(t, \theta') - \hat{P}_1^{k,i}(t, \theta', \varsigma)}{D^{k,i}} \right)^2 \right) \\ S.C \quad &\left\{ \begin{array}{l} UFR \leq L_t^{Rf} \leq 15 \\ -15 \leq S_t^{Rf} \leq \delta - UFR \\ -30 \leq C_t^{Rf} \leq 30 \\ \tau_{1,t}^{NS} \leq \tau_{1,t} \leq 30 \\ 0 \leq \tau_{2,t} \leq 30 \\ 1 \leq k_{1,t} \leq 10 \\ 1 \leq k_{2,t} \leq 10 \\ B_t^{Rf}(0) = 1 \\ B_t^{Rf}(100) = 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4)$$

Les valeurs UFR et δ concernent les taux d'intérêt de long terme et le taux directeur de l'autorité monétaire de la zone UEMOA. Les contraintes de ce problème sont arbitraires et proviennent des travaux antérieurs (Hladíková et Radová, 2012). Suivant la procédure de résolution du problème d'optimisation supra proposée par Gbongué (2019b), on fixe le vecteur de paramètres $(k_{1,t}, k_{2,t}, \tau_{1,t} = \tau_{1,t}^{NS})$, ce qui suppose d'estimer

initialement les paramètres du modèle de référence, notamment le paramètre de forme $\tau_{1,t}^{NS}$. Par la suite, il s'agit de résoudre le problème d'optimisation $H_1(\hat{p})$ à partir de la méthode d'optimisation *limited memory modification of the Broyden Fletcher Goldfarb Shanno* (L-BFGS-B) proposée par Byrd et al. (1995), avec comme valeurs initiales $\zeta_t^{initiale} = (0.02, -0.03, 0.01)$, afin de déterminer les paramètres $(L_t^{Rf}, -S_t^{Rf}, C_t^{Rf})$ pour les valeurs de $\tau_{2,t}$ compris entre 0 et 30. Si les critères d'acceptation des paramètres sont : $L_t^{Rf} > 0$, $L_t^{Rf} - S_t^{Rf} > 0$, en revanche, une comparaison des valeurs de $H_1(\hat{p})$ et des erreurs d'estimation (MAPE, Theil-U-Statistic) doit être effectuée afin de retenir les valeurs faibles.

Dans la suite de cette étude, nous allons approfondir les modèles de décomposition de la structure par terme des PSI qui permettent de reconstituer les structures par terme des primes de crédit et de liquidité. L'approche méthodologique proposée est originale en ce sens qu'elle propose des formes fonctionnelles pour le risque de crédit et de liquidité. Dans ce contexte, le calibrage devient complexe au regard de nombreux paramètres du modèle global à estimer. Pour pallier cette situation, nous proposons une méthode pertinente de calibrage des modèles de risque de crédit et de liquidité, qui est une alternative à la problématique de sur-paramétrage du modèle global.

2.3. Modèle et calibrage de la structure par terme des primes de crédit

2.3.1. Le modèle du risque de crédit

Le modèle du risque de crédit de l'émetteur induit une incertitude dans le paiement futur des flux $CF_t^{k,i}$, qui deviennent ainsi des variables aléatoires $\tilde{F}_t^{k,i}$. En considérant la variable aléatoire T , qui matérialise l'instant de défaut, nous pouvons établir la relation à la date de cotation t :

$$\forall 0 < RR_t < 1, \quad \tilde{F}_t^{k,i}(m) = CF_t^{k,i} \times 1_{T > m | T > t} + RR_t \times CF_t^{k,i} \times 1_{(m-1) < T \leq m | T > t} \quad (5.a)$$

Le caractère aléatoire des flux dépend également de la capacité de remboursement RR_t de l'émetteur souverain. Dans ce contexte, nous nous intéressons à l'espérance de ce flux aléatoire, qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E[\tilde{F}_t^{k,i}(m) | \mathcal{F}_t] &= CF_t^{k,i} \times P(T > m | T > t) + RR_t \times CF_t^{k,i} \times P(m-1 < T \leq m | T > t) \\ &= CF_t^{k,i} \times S_t^{CS}[m, \zeta_1'] + RR_t \times CF_t^{k,i} \times \underbrace{(S_t^{CS}[m-1, \zeta_1'] - S_t^{CS}[m, \zeta_1'])}_{S_t^{CS}[m-1, \zeta_1'] \times \pi^{CS}[m, \zeta_1']} \\ &= CF_t^{k,i} \times \underbrace{(S_t^{CS}[m, \zeta_1'] + RR_t \times S_t^{CS}[m-1, \zeta_1'] \times \pi^{CS}[m, \zeta_1'])}_{B^{CS}[m, \zeta_1']} \end{aligned} \quad (5.b)$$

Les fonctions $B_t^{CS}[m, \zeta_1']$, $S_t^{CS}[m, \zeta_1']$, $\pi^{CS}[m, \zeta_1']$ et RR_t sont respectivement le coefficient d'actualisation, la probabilité de verser les flux, la probabilité de défaut implicite et le taux de recouvrement implicite à la maturité m , liées au risque de crédit. Les primes souveraines de crédit (CS) s'obtiennent à partir de l'expression suivante (Gbongue, 2019c) :

$$CS_t[m, \varsigma'_1] = -\frac{1}{m} \log(B_t^{CS}[m, \varsigma'_1]) \quad (5.c)$$

Dans la littérature, il existe plusieurs modèles candidats pour la modélisation du risque de crédit. Toutefois, nous retenons ici les distributions extrêmes, qui sont des modèles à queue lourde, en l'occurrence les modèles de Weibull, Gumbel et Log Normale (Andritzky, 2006). Dans ces modèles, la formulation mathématique de la fonction de survie S_t^{CS} est assimilable à une opération d'actualisation en temps continu au taux instantané δ_t^{CS} (voir équations (6.a), (6.b) et (6.c) en annexe).

2.3.2. Le calibrage du risque de crédit

Le calibrage du modèle du risque de crédit requiert de déterminer en amont la valeur théorique de l'obligation souveraine en présence de défaut de l'émetteur. A cet effet, nous proposons d'optimiser le processus de calibrage du modèle de crédit, en supposant que les primes souveraines de liquidité sont une proportion λ des primes souveraines de crédit, c'est-à-dire $\forall 0 < \lambda < 1, LS = \lambda \times CS$. Ainsi, nous pouvons écrire que $B_t^{LS}[m, \varsigma'_2] = (B_t^{CS}[m, \varsigma'_1])^\lambda$. En conséquence, la valeur théorique de l'obligation souveraine en présence de défaut de l'émetteur prend les expressions (7.a), (7.b) et (7.c) respectivement dans les modèles de Weibull, Gumbel et Log-Normale (voir équations en annexe).

Le calibrage de ces modèles est assuré en minimisant les erreurs d'estimation des prix en présence de défaut de l'émetteur. En premier lieu, il s'agit de spécifier la valeur théorique de l'obligation souveraine (voir équations 7.a, 7.b et 7.c en annexe), en incluant les paramètres estimés $\hat{\varsigma}$ de la courbe des taux sans risque. En second lieu, nous résolvons les problèmes d'optimisation (équations 8.a, 8.b et 8.c en annexe) à l'aide de la méthode d'optimisation *limited memory modification of the Broyden Fletcher Goldfarb Shanno* (L-BFGS-B) proposée par Byrd et al. (1995), avec comme valeurs initiales $\varsigma_{1,t}^{W,initiale} = (1,1)$, $\varsigma_{1,t}^{G,initiale} = (0,1)$ et $\varsigma_{1,t}^{LN,initiale} = (1,1)$.

2.4. Modèle et calibrage de la structure par terme des primes de liquidité

2.4.1. Le modèle du risque de liquidité

Duffie et al. (2003) soutiennent l'existence d'une prime de liquidité en complément du risque de crédit dans la valorisation des obligations en présence de défaut. En clair, les primes souveraines implicites (PSI) intègrent également les primes souveraines de liquidité implicites (LS). En combinant les équations (1) et (5.b), la valeur théorique $\hat{P}_3^{k,i}$ des obligations est donnée par l'équation (9).

Nous distinguons deux modèles du risque de liquidité. Le premier modèle dérive du modèle du risque de crédit, qui suppose une relation proportionnelle entre les primes de crédit et de liquidité, c'est-à-dire $\forall 0 < \lambda < 1, LS = \lambda \times CS$. Ainsi, le calibrage du modèle du risque de crédit permet d'obtenir simultanément les primes de crédit et de liquidité. Le second modèle consiste à appréhender le risque de liquidité à travers des modèles extrêmes à queue lourde, en l'occurrence les modèles de Weibull, Gumbel et Log Normale. Il s'agit ici de tester ces modèles candidats et de retenir le modèle qui présente le risque d'estimation le plus faible. Dans la littérature, les expressions mathématiques des coefficients d'actualisation B_t^{LS} et des pri-

mes de liquidité LS_t dans les distributions de Weibull, Gumbel et Log Normale sont données dans les équations (10.a), (10.b) et (10.c) en annexe.

A la date de cotation t , les paramètres à estimer sont $\zeta_{2,t}^{W}$, $\zeta_{2,t}^{G}$ et $\zeta_{2,t}^{LN}$ respectivement pour les distributions de Weibull, Gumbel et Log Normale. De plus, les fonctions ϕ et Θ représentent les fonctions de densité et de répartition de la loi normale centrée réduite. Dans la suite de cette étude, nous nous intéressons au calibrage du second modèle de liquidité, le premier ayant été traité dans la sous-section précédente.

$$\begin{aligned} \hat{P}_3^{k,i}(t, \theta, \zeta, \zeta_1', \zeta_2') \\ &= \sum_{m=1}^{\theta} E[\tilde{F}_t^{k,i}(m) | \mathfrak{F}_t] \times B_t^{\mathfrak{R}}[m, \zeta] \times B_t^{LS}[m, \zeta_2'] \\ &= \sum_{m=1}^{\theta} CF_t^{k,i} \times B_t^{\mathfrak{R}}[m, \zeta] \times \underbrace{\left(S_t^{CS}[m, \zeta_1'] + RR_t \times \underbrace{(S_t^{CS}[m-1, \zeta_1'] - S_t^{CS}[m, \zeta_1'])}_{\substack{S_t^{CS}[m-1, \zeta_1'] \times \pi^{CS}[m, \zeta_1'] \\ B_t^{CS}[m, \zeta_1']}} \right) \times B_t^{LS}[m, \zeta_2']}_{\hat{B}_t^{PQ}(m, \zeta')} \end{aligned} \quad (9)$$

2.4.2. Le calibrage du modèle du risque de liquidité

Soulignons que le calibrage du premier modèle de liquidité dans les modèles candidats $\forall \ 0 < \hat{\lambda} < 1$, $\hat{LS} = \hat{\lambda} \times \hat{CS}$ découle des équations (8.a), (8.b) et (8.c). Dans le second modèle de liquidité, le calibrage des modèles candidats est aussi assuré en minimisant les erreurs d'estimation des prix en présence des risques de crédit et de liquidité de l'émetteur. En pratique, il s'agit en premier lieu de calibrer les modèles des taux sans risque $\hat{\zeta}$ et de crédit $\hat{\zeta}_1'$ (cf. supra). En second lieu, il s'agit de spécifier la valeur théorique des obligations (équation 9) en incluant les paramètres estimés des modèles des taux sans risque $\hat{\zeta}$ et de crédit $\hat{\zeta}_1'$, ce qui aboutit aux fonctions de prix (11.a), (11.b) et (11.c) données en annexe.

Enfin, nous résolvons les problèmes d'optimisation à l'aide de la méthode d'optimisation L-BFGS-B avec comme valeurs initiales $\zeta_{2,t}^{W, initiale} = (1, 1)$, $\zeta_{2,t}^{G, initiale} = (0, 1)$ et $\zeta_{2,t}^{LN, initiale} = (1, 1)$. Voir les équations (12.a), (12.b) et (12.c) en annexe.

2.5. Mesure de la qualité d'ajustement des modèles

L'analyse de la qualité d'ajustement des modèles proposés s'appuie sur deux approches en l'occurrence l'approche graphique (Stander, 2005) et l'approche quantitative, qui requiert le calcul des indicateurs de dispersion (Brousseau, 2002 ; Anderson et Sleath, 2001 ; Aljinovic et al., 2012 ; Kovachev et Simeonov, 2014 ; Bolder et Streliski, 1999 ; Navas, 2005 ; Hladíková et Radová, 2012 ; Martellini et al., 2003). Par référence aux travaux antérieurs, nous optons plutôt pour l'approche quantitative dans cette étude. S'il existe de nombreux indicateurs, en revanche le consensus est observé autour de deux indicateurs : la Theil-U-statistic et la MAPE ou *Mean absolute percentage error* (Kovachev et Simeonov, 2014 ; Navas, 2005). Dans un souci

d'harmonisation des pratiques (Gbongue, 2019c ; Gbongue et Bamba, 2022), nous retenons également la MAPE et la Theil-U-Statistic pour mesurer la qualité d'ajustement des modèles de taux sans risque, du risque de crédit et du risque de liquidité, proposés pour la détermination des structures par terme des taux sans risque et des primes souveraines implicites (crédit et liquidité) dans la zone UEMOA. Nous considérons le coefficient de variation (CV) comme un indicateur de robustesse. Le tableau 1 donne les expressions mathématiques de ces indicateurs.

Tableau 1. Indicateurs de mesure du risque d'estimation des modèles

Indicateurs	Expression
Theil-U-statistic	$U = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N \frac{(P^k(t, \theta) - \hat{P}^k(t, \theta))^2}{N}}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N \frac{(\hat{P}^k(t, \theta))^2}{N} + \sum_{k=1}^N \frac{(P^k(t, \theta))^2}{N}}}$
Mean absolute percentage error	$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{ P^k(t, \theta) - \hat{P}^k(t, \theta) }{P^k(t, \theta)}$
Coefficient de variation	$CV = \frac{\sigma(X_1, \dots, X_N)}{E(X_1, \dots, X_N)}$ $\forall k = 1, \dots, N ; X_k = [P^k(t, \theta) - \hat{P}^k(t, \theta)]^2$

CV est perçu comme une mesure relative de variabilité ou de dispersion et est appelé risque unitaire en gestion quantitative des risques.

Source : Auteurs.

Après avoir exposé le modèle de décomposition de la structure par terme des PSI pour l'ensemble des modèles candidats (Weibull, Gumbel et Log-Normale), nous allons procéder à l'analyse empirique appliquée aux données de la zone UEMOA.

3. ANALYSE EMPIRIQUE

Nous présentons premièrement les données utilisées couvrant la période 2015-2022. Deuxièmement, nous calibrons l'ensemble des modèles de taux sans risque, du risque de crédit et du risque de liquidité. Troisièmement, nous analysons le comportement de la structure par terme des taux sans risque, ainsi que la structure par terme des primes souveraines implicites de crédit et de liquidité dans la zone UEMOA. Pour terminer, nous tirons quelques implications de politiques économiques dans l'Union.

3.1. Vue synoptique des données

Dans cette sous-section, nous nous intéressons à la présentation des variables de modélisation contenues dans la base de données, ainsi que les statistiques qui en découlent. Ces données ont été collectées à la Bourse régionale des valeurs mobilières (BRVM) sur la période 2015-2022.

3.1.1. Présentation

Les données collectées concernent les données du dernier jour ouvrable de l'année (fin d'année) des obligations souveraines en circulation à la BRVM sur la

période 2015-2022. La construction de la base de données s'est faite en premier lieu par la sélection des obligations émises par les pays de l'Union, en excluant les obligations des sociétés¹⁶. Par la suite, nous avons calculé les intérêts courus, les prix de marché, les durées de vie résiduelle et les maturités de ces obligations. Dans cette optique, la base de données finale se compose des champs suivants :

- Le code de l'obligation est un symbole unique attribué à une obligation d'un État¹⁷,
- Les dates de cotation, d'émission¹⁸, de jouissance¹⁹ et de maturité²⁰,
- Le prix coté et de marché²¹ de l'obligation,
- Le taux coupon,
- Les intérêts courus,
- La durée de vie résiduelle de l'obligation²²,
- La maturité de l'obligation (en année)²³.

3.1.2. Statistique descriptive

Dans la zone UEMOA, le marché financier régional des titres publics est en pleine expansion. Pour preuve, ont été enregistrées 15, 15, 18, 23, 36, 58, 73 et 79 obligations souveraines en circulation respectivement aux dates de cotation 31/12/2015, 30/12/2016, 29/12/2017, 31/12/2018, 31/12/2019, 31/12/2020, 31/12/2021 et 30/12/2022. Les résultats de l'analyse statistique sont consignés dans le tableau 6 en annexe.

3.2. Résultats

3.2.1. Calibrage et qualité d'ajustement du modèle des taux sans risque

En zone UEMOA²⁴, la détermination de la courbe des taux sans risque de référence requiert l'estimation des paramètres $\hat{\zeta}_t = (\hat{L}_t^{Rf}, -\hat{S}_t^{Rf}, \hat{C}_t^{Rf}, \hat{\tau}_{1,t}, \hat{\tau}_{2,t}, \hat{k}_{1,t}, \hat{k}_{2,t})$.

Les hypothèses sous-jacentes sont définies comme suit :

- Le taux nominal long terme est $UFR = 6,2\%$ ²⁵.
- le taux court terme est le taux directeur de la banque centrale des Etats de l'Afrique de l'Ouest (BCEAO), notamment le taux minimum de soumission. Il est

¹⁶ Pour chacune de ces obligations, nous avons ajouté à la base de données les champs suivants : Code de l'obligation, les dates de cotation, d'émission, de maturité, les prix et le taux coupon.

¹⁷ Par exemple, les obligations ivoiriennes et sénégalaises commencent respectivement par TPCI et EOS, suivies d'un chiffre.

¹⁸ C'est la date à laquelle l'obligation a été émise sur le marché financier.

¹⁹ Il s'agit de la date de paiement des coupons.

²⁰ C'est la date de remboursement du capital par l'émetteur.

²¹ C'est la somme du prix coté et de l'intérêt couru.

²² C'est la différence entre les dates de maturité et de cotation.

²³ C'est la différence entre les dates de maturité et d'émission.

²⁴ Dans une Union économique et monétaire, la construction de la courbe des taux sans risque de référence est justifiable. De plus, elle est fondamentale dans l'élaboration de la courbe des taux de chaque pays de l'Union, à travers la détermination des primes de risque, qui matérialisent le profil de risque de ces pays. En clair, la courbe des taux de chaque pays de l'Union s'obtient par la sommation de la courbe des taux sans risque de référence et des primes de risque implicites.

²⁵ Cette valeur est déterminée sur des hypothèses cohérentes de croissance et d'inflation sur le long terme. Sur recommandation des experts (directeurs des activités de marché, etc.), nous avons choisi un taux de croissance réelle de 4% et un taux d'inflation de 2,2 %. En outre, ces choix sont corrigés progressivement de sorte que la courbe de taux finale obtenue permette in fine de retrouver les données d'un émetteur de référence. Dans la zone UEMOA, nous retenons la Côte d'Ivoire (moteur de la croissance économique) comme l'émetteur de référence car ce pays dispose du plus important volume d'émission sur le marché financier régional.

de $\delta = 2,5\%$ ²⁶ avant le 30/06/2020. A partir de cette date, il est fixé à 2% en raison de la décision du Comité de politique monétaire du 22/06/2020. Il est revenu à 2,5% depuis le 30/06/2022.

Sous ces hypothèses, le tableau 2 donne les valeurs des paramètres obtenues à plusieurs dates de cotation²⁷.

Tableau 2. Estimation des paramètres du modèle des taux sans risque sur la période 2015-2022

	δ	$\hat{L}_t^{Rf}$	$-\hat{S}_t^{Rf}$	$\hat{C}_t^{Rf}$	$\hat{\tau}_{1,t}$	$\hat{\tau}_{2,t}$	$\hat{k}_{1,t}$	$\hat{k}_{2,t}$	TUS	MAPE	CV
t=31/12/2015	2,5%	6,5%	-4%	-0,46%	1	4	3	2	1,1%	1,97%	0,79
t=30/12/2016	2,5%	6,2%	-3,7%	-1,59%	1	4	3	2	1,29%	2,23%	0,95
t=29/12/2017	2,5%	6,2%	-3,7%	-1,85%	0,8	4	3	2	1,38%	2,31%	1,08
t=31/12/2018	2,5%	6,2%	-3,7%	-1,35%	0,8	4	3	2	1,10%	1,86%	0,97
t=31/12/2019	2,5%	6,2%	-3,7%	-1,50%	1	4	3	2	1,27%	2,18%	0,99
t=31/12/2020	2%	6,2%	-4,2%	-1,83%	2	4	3	2	1,68%	2,89%	1,19
t=31/12/2021	2%	6,2%	-4,2%	-3,25%	2	4	3	2	1,77%	2,96%	1,3
t=30/12/2022	2,5%	6,2%	-3,7%	-3,61%	2	4	3	2	1,96%	3,41%	1,13

Source: Auteurs.

3.2.2. Calibrage et qualité d'ajustement du modèle du risque de crédit

Le calibrage révèle que les primes souveraines de crédit ne sont pas volatiles sur la période 2015-2022, ce qui s'explique par la faible variabilité des paramètres du modèle, ainsi que des erreurs d'estimation des prix. Ce constat est conforme à la littérature existante (Andritzky, 2006). Pour les modèles étudiés (Weibull, Gumbel et Log Normale), les erreurs d'estimation des prix sont inférieures à 5% et varient dans les intervalles [0,98% ; 2,6%] pour le TUS et [1,5% ; 3,65%] pour le MAPE, ce qui démontre la qualité du calibrage des modèles de risque de crédit. De plus, le coefficient de variation (CV) est supérieur à 1, ce qui est conforme aux attentes théoriques²⁸.

De plus, nous remarquons que le facteur de liquidité converge vers 30%, ce qui donne une première indication sur le comportement des primes de liquidité, qui représentent ici 30% de la structure par terme des primes de crédit. Le taux de recouvrement est passé de 62% au 31/12/2015 à 59% au 31/12/2019. Toutefois, il est estimé à 60% aux 31/12/2020 et 31/12/2021, avant de redescendre à 59% au 30/12/2022. Ces résultats sont consignés dans les tableaux 3, 4 et 5.

De ce qui précède, nous concluons que les modèles candidats sont adaptés à l'estimation des primes souveraines de crédit sur la période 2015-2022 car ils

²⁶ Voir <http://www.bceao.int/Instruments-de-mise-en-oeuvre-de.html>

²⁷ Dans un souci de comparaison, nous fixons les paramètres $\hat{k}_{1,t}$ et $\hat{k}_{2,t}$, ainsi que les paramètres de forme $\hat{\tau}_{1,t}$ et $\hat{\tau}_{2,t}$ à chaque date de cotation.

²⁸ Les lois de probabilité extrêmes ont un CV supérieur à 1.

présentent de faible risque d'estimation (inférieur à 5%). A l'interpolation de la courbe, nous retenons le modèle de Gumbel car les primes souveraines issues de ce modèle semblent progresser moins vite que les primes souveraines issues du modèle de Weibull. A l'extrapolation de la courbe, il apparaît que les modèles de Gumbel et Weibull semblent être instables sur les maturités non observables, contrairement au modèle Log-Normale.

Tableau 3. Calibrage et qualité d'ajustement du modèle de Weibull sur la période 2015-2022

	$\hat{\alpha}_{w,t}^{CS}$	$\hat{\gamma}_{w,t}^{CS}$	$\hat{\lambda}_t$	$\hat{RR}_t$	TUS	$MAPE$	CV
t=31/12/2015	22	5,12	0,3	62%	1,1%	1,66%	1,77
t=30/12/2016	22	5,12	0,3	61%	1,29%	2,03%	1,49
t=29/12/2017	22	5,13	0,3	61%	1,08%	1,71%	1,45
t=31/12/2018	22	5,13	0,3	60%	1,05%	1,62%	1,54
t=31/12/2019	22,16	5,13	0,3	59%	1,05%	1,66%	1,35
t=31/12/2020	22,16	5,13	0,3	60%	1,54%	2,35%	1,69
t=31/12/2021	22,16	5,13	0,3	60%	1,47%	2,35%	1,31
t=30/12/2022	22,27	5,13	0,3	59%	2,57%	3,65%	2,42

Source: Auteurs.

Tableau 4. Calibrage et qualité d'ajustement du modèle de Gumbel sur la période 2015-2022

	$\hat{\alpha}_{G,t}^{CS}$	$\hat{\beta}_{G,t}^{CS}$	$\hat{\lambda}_t$	$\hat{RR}_t$	TUS	$MAPE$	CV
t=31/12/2015	21	7	0,3	62%	1,06%	1,60%	1,62
t=30/12/2016	21	7	0,3	61%	1,19%	1,93%	1,25
t=29/12/2017	21	6,9	0,3	61%	0,99%	1,54%	1,29
t=31/12/2018	21	6,9	0,3	60%	1%	1,59%	1,42
t=31/12/2019	21	6,9	0,3	59%	1,02%	1,62%	1,26
t=31/12/2020	21	6,9	0,3	60%	1,49%	2,29%	1,66
t=31/12/2021	21	6,9	0,3	60%	1,45%	2,33%	1,3
t=30/12/2022	21	6,9	0,3	59%	2,26%	3,44%	1,88

Source: Auteurs.

Ces informations précieuses permettent d'avoir une meilleure visibilité du modèle de valorisation des obligations souveraines sur le marché financier de l'UEMOA. En conséquence, nous proposons un modèle hybride pour modéliser le risque de crédit dans l'Union. Ce modèle hybride, qui se compose des modèles de Gumbel et Log-Normale à l'interpolation et l'extrapolation de la courbe des primes

de crédit, est utilisé pour revaloriser les obligations souveraines, en vue du calibrage du modèle de risque de liquidité. En réécrivant les équations (11.a), (11.b), (11.c), nous obtenons les expressions (13.a), (13.b), (13.c), données en annexe, de la valeur théorique des obligations souveraines pour l'ensemble des modèles candidats du risque de liquidité.

Tableau 5. Calibrage et qualité d'ajustement du modèle Log Normale sur la période 2015-2022

	$\hat{\sigma}_{LN,t}^{CS}$	$\hat{\beta}_{LN,t}^{CS}$	$\hat{\lambda}_t$	$\hat{RR}_t$	TUS	$MAPE$	CV
t=31/12/2015	31,47	0,67	0,3	62%	1,30%	1,88%	2,19
t=30/12/2016	31,47	0,67	0,3	61%	1,68%	2,31%	1,83
t=29/12/2017	31,57	0,67	0,3	61%	1,48%	2,27%	1,55
t=31/12/2018	31,57	0,67	0,3	60%	1,27%	1,96%	1,78
t=31/12/2019	31,77	0,67	0,3	59%	1,21%	1,79%	1,68
t=31/12/2020	33,35	0,68	0,3	60%	1,69%	2,49%	1,80
t=31/12/2021	33,35	0,68	0,3	60%	1,61%	2,57%	1,31
t=30/12/2022	33,46	0,68	0,3	59%	2,41%	3,59%	1,67

Source: Auteurs.

3.2.3. Calibrage et qualité d'ajustement des modèles de liquidité

La sous-section précédente a exposé le calibrage du premier modèle de liquidité, dont le paramètre de liquidité converge vers 30% sur la période 2015-2022. En s'appuyant sur le modèle hybride du risque de crédit, nous calibrons le second modèle de liquidité à partir des modèles candidats de Weibull, Gumbel et Log-Normale (équations 13.a, 13.b et 13.c, en annexe). Nous consignons les résultats obtenus dans les tableaux 7, 8 et 9.

Le calibrage révèle que les primes souveraines de liquidité ne sont pas volatiles sur la période 2015-2022 en raison de la faible variabilité des paramètres des modèles, ainsi que des erreurs d'estimation des prix. Ce constat est également conforme à la littérature existante (Andritzky, 2006). Pour les trois modèles étudiés, les erreurs d'estimation des prix sont également inférieures à 5% et varient également dans les intervalles [0,98% ; 2,6%] pour le TUS et [1,5% ; 3,65%] pour le MAPE, ce qui démontre la qualité du calibrage des modèles de risque de liquidité. Aussi, CV est supérieur à 1, ce qui est conforme aux attentes théoriques. De plus, nous remarquons une amélioration du risque d'estimation des modèles candidats par rapport aux résultats du calibrage des modèles du risque de crédit. On en déduit que la modélisation du risque de liquidité est plus pertinente dans l'Union lorsqu'elle est appréhendée par des modèles extrêmes, par comparaison à l'hypothèse de proportionnalité retenue dans Gbongué et Bamba (2022), pour approximer les primes de liquidité dans le modèle de crédit. Notons que le taux de recouvrement n'a pas changé, ce qui légitime les résultats obtenus dans le modèle de crédit. Il est passé de 62% au 31/12/2015 à 59% au 31/12/2019, avant de se stabiliser à 60% aux 31/12/2020 et 31/12/2021. Au 30/12/2022, il est estimé à 59%.

Tableau 7. Calibrage et qualité d'ajustement du modèle de liquidité de Weibull sur la période 2015-2022

	$\hat{\alpha}_{w,t}^{LS}$	$\hat{\gamma}_{w,t}^{LS}$	$\hat{RR}_t$	TUS	$MAPE$	CV
t=31/12/2015	22,2	5,42	62%	1,1%	1,66%	1,80
t=30/12/2016	22,2	5,42	61%	1,29%	2,03%	1,61
t=29/12/2017	22,2	5,42	61%	1,08%	1,71%	1,47
t=31/12/2018	22,2	5,42	60%	1,05%	1,62%	1,54
t=31/12/2019	22,2	5,42	59%	1,05%	1,66%	1,36
t=31/12/2020	22,2	5,42	60%	1,54%	2,35%	1,68
t=31/12/2021	22,2	5,42	60%	1,47%	2,35%	1,31
t=30/12/2022	22,2	5,42	59%	2,57%	3,65%	2,83

Source : Auteurs.

Tableau 8. Calibrage et qualité d'ajustement du modèle de liquidité de Gumbel sur la période 2015-2022

	$\hat{\alpha}_{g,t}^{LS}$	$\hat{\beta}_{g,t}^{LS}$	$\hat{RR}_t$	TUS	$MAPE$	CV
t=31/12/2015	24,6	8	62%	1,06%	1,60%	1,62
t=30/12/2016	24,6	8	61%	1,19%	1,93%	1,25
t=29/12/2017	24,6	8	61%	0,99%	1,54%	1,29
t=31/12/2018	24,6	8	60%	1%	1,59%	1,42
t=31/12/2019	24,6	8	59%	1,02%	1,62%	1,26
t=31/12/2020	24,6	8	60%	1,49%	2,29%	1,66
t=31/12/2021	24,6	8	60%	1,45%	2,33%	1,3
t=30/12/2022	24,6	8	59%	2,26%	3,44%	2,12

Source : Auteurs.

Tableau 9. Calibrage et qualité d'ajustement du modèle de liquidité Log Normale sur la période 2015-2022

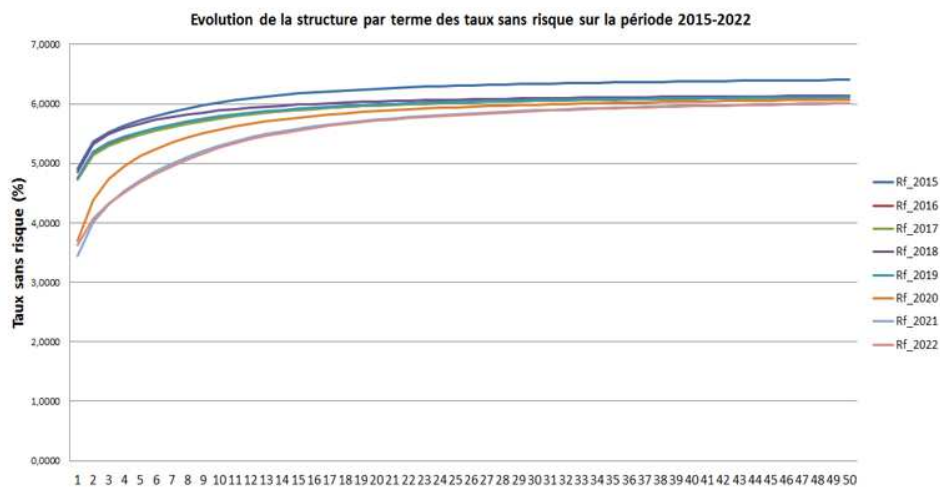
	$\hat{\epsilon}_{LN,t}^{LS}$	$\hat{\beta}_{LN,t}^{LS}$	$\hat{RR}_t$	TUS	$MAPE$	CV
t=31/12/2015	39	0,69	62%	1,19%	1,76%	1,98
t=30/12/2016	39,46	0,69	61%	1,46%	2,14%	1,68
t=29/12/2017	39,46	0,69	61%	1,22%	1,9%	1,53
t=31/12/2018	39,46	0,69	60%	1,12%	1,72%	1,66
t=31/12/2019	39,46	0,69	59%	1,11%	1,70%	1,50
t=31/12/2020	39,46	0,69	60%	1,61%	2,41%	1,75
t=31/12/2021	39,46	0,69	60%	1,53%	2,42%	1,31
t=30/12/2022	39,46	0,69	59%	2,41%	3,59%	2,11

Source : Auteurs.

3.3. Analyse des résultats

Nous notons, en premier lieu, que la courbe des taux sans risque est croissante (pente positive) sur la période d'étude 2015-2022, malgré le contexte marqué par la pandémie Covid-19 et les effets du conflit russo-ukrainien. Ce constat est conforme à la situation économique de l'Union, qui affiche des taux de croissance positifs sur cette période. Rappelons que cette courbe est sensible à ces hypothèses de construction à savoir la date de cotation, le modèle utilisé et les hypothèses de calibrage du modèle. La figure 1 illustre cette assertion.

Figure 1 : Evolution de la structure par terme des taux sans risque de l'UEMOA sur la période 2015-2022



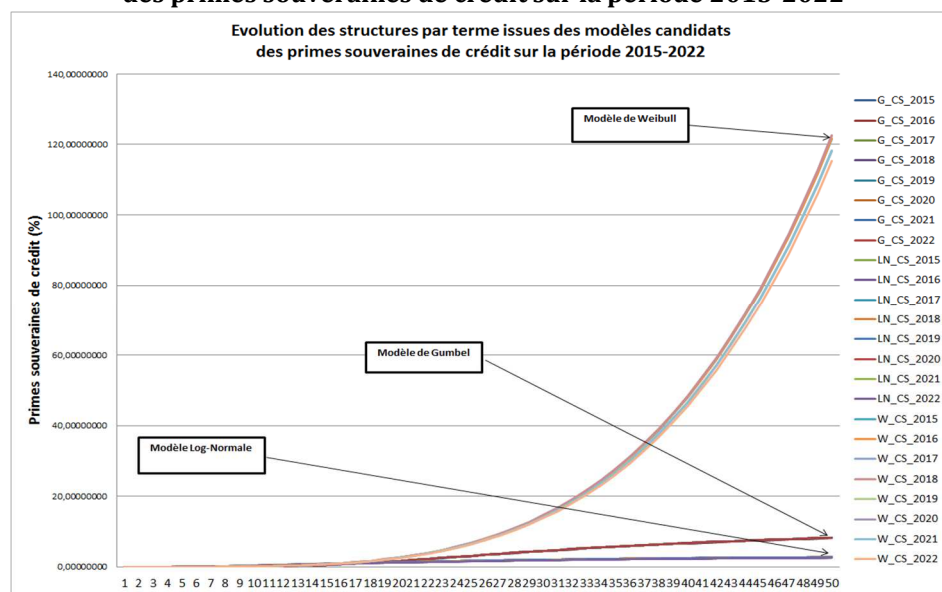
Source : Auteurs.

En second lieu, nous notons que les structures par terme des primes souveraines de crédit et de liquidité sont également croissantes, avec des pentes positives sur la période d'étude (Figures 2 et 3). Cela signifie que la prime de risque tend à progresser dans l'Union au fur et à mesure que l'horizon d'investissement augmente, ce qui est conforme aux attentes théoriques (Hicks, 1939). L'allure de ces structures par terme (Figures 2 et 3) révèle l'instabilité du modèle de Weibull sur les maturités longues, ainsi que celle du modèle de Gumbel avec une intensité moindre, contrairement au modèle Log-Normale. En conséquence, le recours aux modèles hybrides consistant à combiner deux lois extrêmes de probabilité pour estimer les primes de risque de crédit et de liquidité, est une solution pertinente au regard de l'incapacité des modèles candidats à reconstituer l'ensemble des points de la courbe en raison de l'absence des données sur certaines maturités. Cela se constate également dans l'analyse des coefficients d'actualisation, qui démontre la pertinence des modèles hybrides en ce sens qu'ils se comportent mieux à l'interpolation et à l'extrapolation, comparativement aux modèles classiques des risques de crédit (Annexe C) et de liquidité (Annexe D).

Cette difficulté est une caractéristique des marchés financiers en développement. En zone UEMOA, nous la contournons à travers les modèles hybrides. L'analyse empirique révèle que le modèle de Gumbel (G) semble convenir à l'interpolation de la courbe des PSI car il présente le risque d'estimation le plus faible sur toute la période d'étude. A l'extrapolation (correspondant aux maturités supérieures à 12 ans), le modèle Log-Normale (LN) est adapté, en raison de sa stabilité sur le long terme. La

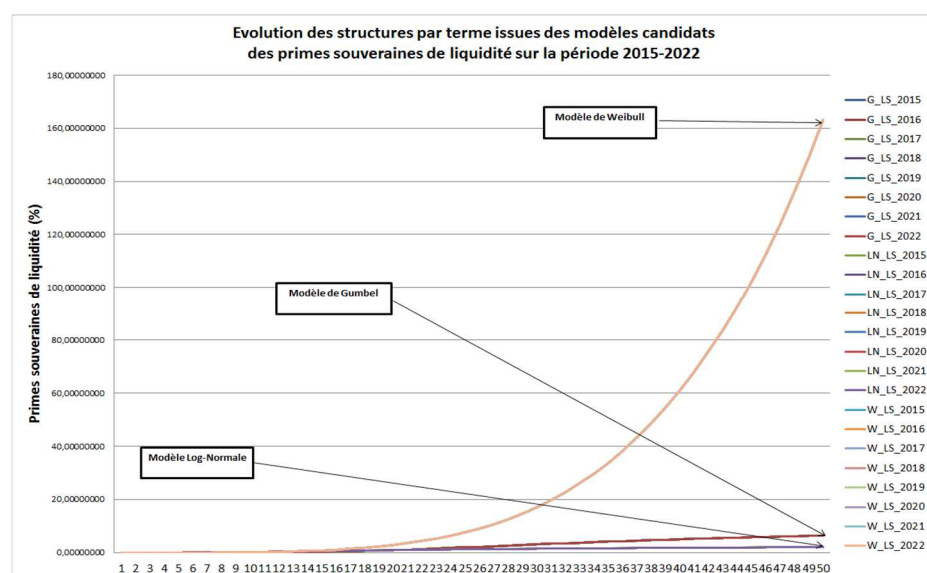
figure 4 présente l'évolution des structures par terme de crédit et de liquidité issues des modèles hybrides G-LN pour les maturités comprises entre 0 et 50 ans.

Figure 2 : Evolution des structures par terme issues des modèles candidats des primes souveraines de crédit sur la période 2015-2022



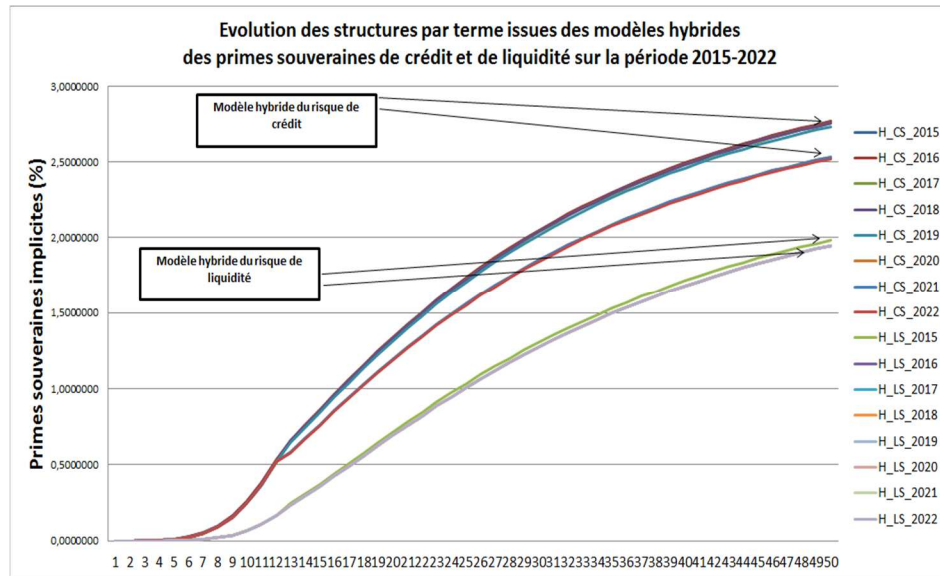
Source : Auteurs.

Figure 3 : Evolution des structures par terme issues des modèles candidats des primes souveraines de liquidité sur la période 2015-2022



Source : Auteurs.

Figure 4 : Evolution des structures par terme issues des modèles hybrides G-LN des primes souveraines de crédit et de liquidité sur la période 2015-2022



Source : Auteurs.

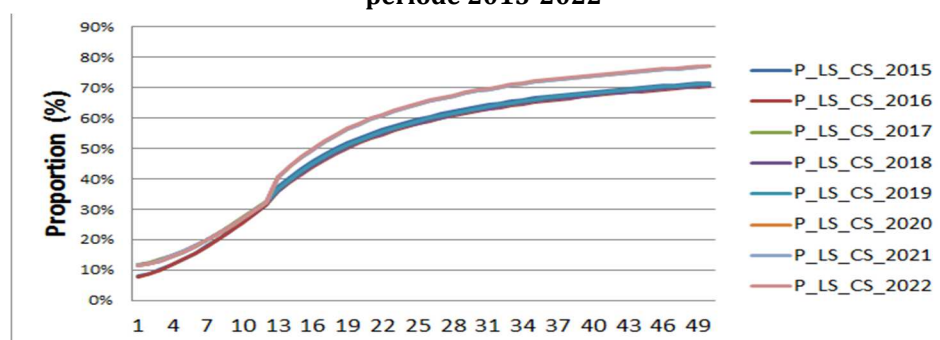
En référence aux travaux antérieurs relatifs à l'UEMOA, le modèle hybride supra s'ajuste bien à la structure des données modélisées sur une période d'étude plus large (2015-2022), avec un risque d'estimation moins important que celui observé dans Gbongue et Bamba (2022). Les courbes de PSI obtenues (Figure 4) sont stables car elles ne subissent pas de déformation brutale sur la période d'étude. En proposant un modèle hybride, qui regroupe simultanément des formes fonctionnelles du risque de crédit et de liquidité, nous contribuons à améliorer le risque d'estimation du modèle de la structure par terme des PSI dans l'Union. Par exemple, à la date du 31/12/2019, le risque d'estimation (TUS, MAPE) du modèle hybride est de (1,02%; 1,62%) et de (1,11%; 1,70%), respectivement à l'interpolation et à l'extrapolation de la courbe des PSI, contre (1,23%; 1,81%) dans Gbongue et Bamba (2022). Aussi, à la date du 31/12/2020, ce risque est évalué à (1,49%; 2,29%) à l'interpolation et de (1,61%; 2,41%) à l'extrapolation, contre (1,97%; 2,83%) dans les travaux antérieurs de l'Union.

De manière empirique, nous constatons que la structure par terme des primes souveraines de liquidité (PSL), peut être approximée par une proportion de la structure par terme des primes souveraines de crédit (PSC). Toutefois cette proportion est plutôt croissante selon la maturité (Figure 5), ce qui signifie que les primes de liquidité convergent progressivement vers les primes de crédit dans le long terme. Comme le risque de liquidité est plus perceptible dans les marchés financiers en développement, ce résultat semble plus pertinent, comparativement à la proportion constante de 0,3% obtenue dans Gbongue et Bamba (2022).

La nécessité de modéliser le risque de liquidité, par opposition à l'hypothèse de proportionnalité retenue dans Gbongue et Bamba (2022), contribue également à mieux évaluer les paramètres d'analyse des marchés financiers. Par exemple, le taux de recouvrement implicite des émetteurs souverains se situe autour de 59% et 60% respectivement aux dates de cotation du 31/12/2019 et 31/12/2020, contre 55% et

64% dans les travaux antérieurs. De même, à la date du 31/12/2019, le coefficient de variation se situe autour de 1,26 et 1,50 respectivement à l'interpolation et à l'extrapolation de la courbe des PSI, contre 1,77. En affinant l'estimation du CV, les analystes appréhendent mieux les épisodes de risque sur le marché financier de l'Union. Comme illustration, l'on observe un risque plus important aux dates de cotation du 31/12/2020 et 30/12/2022 (Tableaux 8, 9), qui pourrait traduire a priori des tensions financières sur le marché obligataire de l'UEMOA. Ces tensions observées à ces deux dates, peuvent s'expliquer par les crises actuelles (Covid-19, russo-ukrainienne), conformément aux travaux de Hao et al. (2022) et Karaman (2022)²⁹.

Figure 5 : Le poids de la prime de liquidité dans la prime de crédit sur la période 2015-2022



Source : Auteurs.

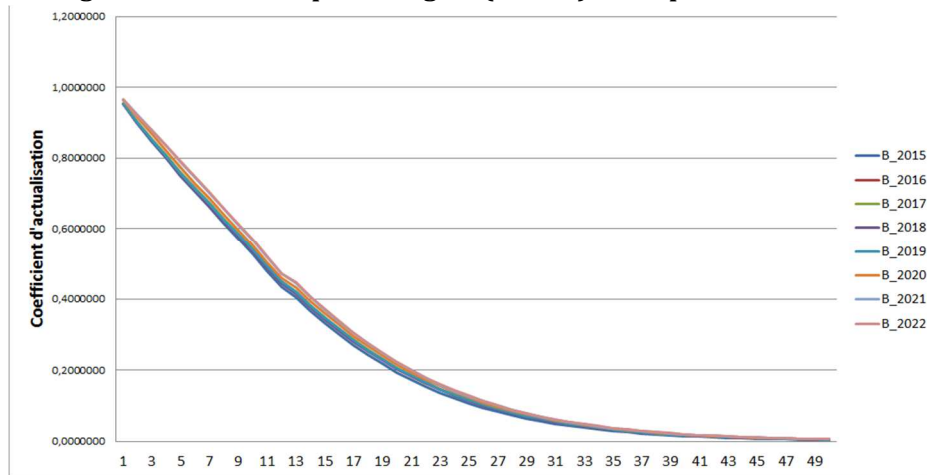
De ce qui précède, nous pouvons conclure que le modèle hybride présente des résultats supérieurs comparativement aux résultats obtenus dans les travaux antérieurs de l'Union, que nous avons essayé d'apprécier en termes d'amélioration du risque d'estimation (TUS, MAPE) des modèles de risque, de la capacité à affiner l'évaluation des paramètres d'analyse du marché financier (taux de recouvrement implicite RR des émetteurs souverains, coefficient de variation) et de la stabilité de la courbe des PSI.

Enfin, l'on constate que la politique monétaire de l'Union basée sur la stabilité des prix, s'est traduite par une faible variation de l'instrument monétaire (-/+0,5%) sur la période d'étude. Cette capacité de la politique monétaire à ancrer les anticipations des agents économiques dans l'Union participe à la stabilité du marché financier régional à travers la maîtrise de la volatilité des taux, ce qui se matérialise par une faible variabilité des paramètres des modèles sur la période d'étude. Cette politique des taux de la BCEAO concourt à rassurer et à préserver les intérêts des investisseurs de l'Union à travers la stabilité dans la valeur temps de l'argent. Pour l'appréhender, nous calculons simplement les coefficients d'actualisation $B_t = B_t^{RF} \times B_t^{CS} \times B_t^{LS}$ du modèle global, qui matérialise les valeurs actuelles de 1 FCFA dans l'Union. Sur la période 2015-2022, nous observons une stabilité dans les coefficients d'actualisation, ce qui nous permet de conclure que l'UEMOA est une zone économique propice aux investis-

²⁹ Dans la littérature, l'on constate que les crises augmentent le risque souverain. En effet, Hao et al. (2022) trouvent que le risque de crédit souverain, mesuré par les écarts de swap de défaut de crédit souverain, augmente significativement après l'épidémie de la pandémie Covid-19, et l'effet négatif est plus prononcé pour le risque de crédit à court terme. De même, Karaman (2022) conclut que le choc Covid-19 a augmenté de manière significative le risque souverain dans les pays périphériques de l'Union européenne et que les mesures de politique monétaire ont été efficaces pour assouplir les conditions financières dans ces pays.

sements en monnaie locale en ce sens qu'elle mène une politique monétaire visant à préserver la dynamique de la valeur actuelle des flux financiers futurs. La figure 6 illustre cette assertion.

Figure 6 : Valeur temps de l'argent (1 FCFA) sur la période 2015-2022



Source : Auteurs.

Lorsque la BCEAO relève l'instrument monétaire, l'on observe une variation positive de la prime de risque de crédit, ainsi qu'une variation négative du taux de recouvrement implicite, dont l'intensité de la variation dépend de l'ampleur du choc monétaire. Ces résultats sont conformes aux attentes théoriques (Lozano-Espitia et Arias-Rodríguez, 2022 ; Coimbra, 2020 ; Kirikkaleli et Gokmenoglu, 2020). Sur la période d'étude, le taux de recouvrement implicite se situe à des valeurs supérieures ou égales à 60 % en cas de baisse de 0,5% de l'instrument monétaire. A contrario, il se situe en dessous de 60% en cas de hausse de 0,5% de l'instrument monétaire. Ce constat montre que les décisions monétaires guidées par la stabilité des prix affectent aussi la perception du risque souverain implicite par le mécanisme d'ajustement du taux de recouvrement implicite sur le marché financier régional. On en déduit que les pays de l'Union devraient ajuster leurs politiques d'emprunt à la stratégie monétaire de la BCEAO pour une meilleure coordination des politiques monétaire et budgétaire.

3.4. Implications des résultats

Il est important de souligner que le modèle hybride s'ajuste bien à la structure des économies de l'Union en ce sens que les primes de risque issues de ce modèle sont strictement croissantes par maturité, avec des pentes positives. Sur le plan économique, cela est en accord avec la théorie des anticipations rationnelles selon laquelle la prime de terme est croissante par maturité (Hicks, 1939). L'allure de la courbe hybride des PSI montre que l'UEMOA est une zone économique en pleine croissance sur la période d'étude, en accord avec la réalité actuelle de l'Union.

De plus, les résultats révèlent que l'ensemble des structures par terme de taux sont sensibles aux décisions des autorités monétaires. En pratique, l'on observe empiriquement que la politique monétaire modifie le comportement de la courbe des taux sans risque à travers ses effets sur la partie courte de la courbe. Par exemple, toute politique monétaire expansionniste provoque une baisse des taux courts, dont l'intensité décroît selon la maturité. Ce résultat est en accord avec la littérature

(Caldeira et Smaniotto, 2018 ; Boamah, 2015 ; Piazzesi, 2005). Cette information est transmise ensuite le long de la courbe des taux sans risque, ce qui affecte le comportement des structures par terme de crédit et de liquidité. Ces résultats traduisent aussi l'évolution radicale du secteur financier de la zone UEMOA au cours de cette dernière décennie. En effet, celui-ci était taxé d'insensible aux variations des taux directeurs de la Banque centrale (Bamba, 2001), caractéristique des économies d'endettement par opposition aux économies de marché financier. C'est à croire que les réformes de libéralisation du secteur financier des années 1990 dont les effets n'étaient pas encore nettement perceptibles durant les années 2000 (Bamba, 2011), sont aujourd'hui devenues réelles, traduisant une transformation structurelle du secteur financier.

Les résultats montrent que la perception du risque souverain implicite est aussi sensible aux décisions des autorités monétaires, dont l'objectif est d'assurer la stabilité des prix dans l'Union. Par exemple, le taux de recouvrement implicite se situe à des niveaux élevés (supérieur à 60%) sur le marché financier régional dans le cas d'une politique monétaire visant à lutter contre les incertitudes monétaires. Cette stratégie monétaire, qui se traduit par une faible variabilité de l'instrument monétaire sur la période d'étude, concourt à ancrer les anticipations, ce qui améliore la perception du risque souverain implicite dans l'Union (Balima et al., 2017 ; Thornton et Vasilakis, 2016). Notons que cette situation est favorable aux émissions obligataires et par ricochet au développement du marché financier régional de l'UEMOA.

De ce qui précède, les politiques monétaire et budgétaire sont intimement liées. Par conséquent, une coordination de ces politiques est bénéfique pour le développement économique et financier en ce sens qu'elle contribue à lutter contre la volatilité des courbes de taux sur le marché financier de l'Union.

CONCLUSION

Cette étude apporte une base technique rigoureuse aux insuffisances des méthodes d'estimation des PSI, et particulièrement à la résolution de la question de la forme fonctionnelle pour la structure par terme des primes de liquidité, par l'introduction de quelques innovations méthodologiques dans le modèle quantitatif du risque souverain, notamment la décomposition de la structure par terme des PSI. Ainsi, elle apporte des innovations à la méthode indirecte d'estimation de la structure par terme des PSI, en formulant un modèle hybride combinant deux lois de probabilité extrême (les lois de Gumbel et Log-Normale), capable de reconstituer, respectivement à l'interpolation et l'extrapolation, la structure par terme de l'ensemble des points de la courbe des primes souveraines de crédit et de liquidité, ce qui améliore également l'estimation du taux de recouvrement implicite en cas de défaut de l'émetteur.

Appliquée au marché financier régional de l'UEMOA, l'analyse empirique révèle que la stabilité des structures par terme des primes souveraines de crédit et de liquidité découle de l'estimation des modèles de Gumbel à l'interpolation et Log-Normale à l'extrapolation, qui correspond aux maturités supérieures à 12 ans. La formulation explicite du modèle hybride de liquidité contribue à affiner l'évaluation du taux de recouvrement implicite, ainsi que du coefficient de variation, permettant ainsi de mieux appréhender les épisodes de risque sur le marché financier de l'Union.

L'analyse révèle également que les courbes de taux, ainsi que la perception du risque souverain implicite, sont sensibles aux politiques monétaire et budgétaire. De ce fait, une meilleure coordination de ces politiques est bénéfique pour la stabilité macro-financière dans l'Union. Ainsi, la politique monétaire basée sur la stabilité des prix améliore la perception du risque souverain implicite et contribue à ancrer les anticipations dans l'Union, ce qui assure la stabilité des taux de marché. Cette derni-

ère est une condition *sine qua non* de la stabilité de la valeur actuelle des investissements dans le temps. En conséquence, la zone UEMOA apparaît comme un espace attractif aux investissements en monnaie locale du fait qu'elle mène une politique monétaire visant à préserver la dynamique de la valeur actuelle des flux financiers futurs.

REFERENCES

- Abid A., Abid F., Kaffel B.**, 2020, CDS-based implied probability of default estimation, *Journal of Risk Finance*, 21(4), 399-422.
- Afonso A.**, 2003, Understanding the determinants of sovereign debt ratings: Evidence for the two leading agencies, *Journal of Economics and Finance*, 27(1), 56-74.
- Aguiar M., Gopinath G.**, 2006, Defaultable debt, interest rates and the current account, *Journal of International Economics*, 69(1), 64-83.
- Aljinović Z., Poklepović T., Katalinić K.**, 2012, Best fit model for yield curve estimation, *Croatian Operational Research Review (CRORR)*, 3.
- Alsakka R., Gwilym O.**, 2013, Rating agencies' signals during the European sovereign debt crisis: Market impact and spillovers, *Journal of Economic Behavior & Organization*, 85(1), 144-162.
- Anderson N., Sleath J.**, 2001, New estimates of the UK real and nominal yield curves, Bank of England.
- Andrieș A. M., Ongena S., Sprincean N.**, 2021, The COVID-19 Pandemic and Sovereign Bond Risk, *The North American Journal of Economics and Finance*, 58.
- Andritzky J. R.**, 2006, *Sovereign default risk valuation: Implications of debt crises and bond restructuring*, Springer.
- Arellano C.**, 2008, Default Risk and Income Fluctuations in Emerging Economies, *American Economic Review*, 98 (3), 690-712.
- Arellano C., Bai Y., Mihalache G.**, 2018, Default risk, sectoral reallocation, and persistent recessions, *Journal of International Economics*, 112(C), 182-199.
- Arellano C., Ramanarayanan A.**, 2012, Default and the Maturity Structure in Sovereign Bonds, *Journal of Political Economy*, 120(2), 187-232.
- Augustin P., Sokolovski V., Subrahmanyam M. G., Tomio D.**, 2021, In sickness and in debt: The COVID-19 impact on sovereign credit risk, *Journal of Financial Economics*, 143(3), 1251-1274.
- Balima W. H., Combes J.-L., Minea A.**, 2017, Sovereign debt risk in emerging market economies : Does inflation targeting adoption make any difference?, *Journal of International Money and Finance*, 70, 360-377.
- Bamba N'galadjo L.**, 2001, La construction des marchés financiers régionaux dans les pays africains de la Zone Franc, Proceedings of the Annual Meeting of Finance Ministers of the Franc Zone Countries.
- Bamba N'galadjo L.**, 2011, Structure et Efficacité du Secteur Financier Ivoirien, in *Sortir du Sous-Développement : Quelles Nouvelles Pistes pour l'Afrique de l'Ouest ?*, Tome 2 : Financement et Coopération, L'Harmattan, Paris, 255-277.
- Berardi A., Stefania C., Michele T.**, 2004, Predicting default probabilities and implementing trading strategies for emerging market bond portfolios, *Emerging Markets Reviews*, 5, 447-469.
- Bernardo M., Caio A.**, 2008, Extracting Default Probabilities from Sovereign Bonds, *Brazilian Review of Econometrics*, 28(1).
- Bevilaqua, J., Hale, G. B., Tallman E.**, 2020, Corporate yields and sovereign yields, *Journal of International Economics*, 124(C).
- Bissoondoyal-Bheenick E.**, 2012, Do sovereign rating changes trigger spillover effects? , *Research in International Business and Finance*, 26(1), 79-96.
- Black F., Cox J. C.**, 1976, Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions, *Journal of Finance*, 31, 351-367.
- Boamah, N. A.**, 2015, Testing the expectations hypothesis of the term structure of interest rate: the case of Ghana, *Journal of African Business*, 1-15.
- Bocola L., Bornstein G., Dovis A.**, 2019, Quantitative sovereign default models and the European debt crisis, *Journal of International Economics*, 118(C), 20-30.

- Bocola, L., Dovis A.**, 2019, Self-Fulfilling Debt Crises: A Quantitative Analysis, *American Economic Review*, 109 (12), 4343-4377.
- Bolder D., Stréliski D.**, 1999, Yield Curve Modelling at the Bank of Canada, Rapport technique n° 84.
- Boumparis, P., Milas, C., Panagiotidis, T.**, 2017, Economic policy uncertainty and sovereign credit rating decisions : Panel quantile evidence for the Eurozone, *Journal of International Money and Finance*, 79, 39-71.
- Brennan M. J., Schwartz E. S.**, 1977, Convertible bonds : Valuation and optimal strategies for call and conversion, *Journal of Finance*, 32, 1699-1715.
- Brennan M. J., Schwartz E. S.**, 1980, Analysing convertible bonds, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, 907-929.
- Brousseau V.**, 2002, The functional form of yield curves, European Central Bank, Working Paper n°80.
- Butler A. W. et Fauver L.**, 2006, Institutional Environment and Sovereign Credit Ratings, *Financial Management*, 35(3), 53-79.
- Byrd R. H., Lu P., Nocedal J. and Zhu, C.**, 1995, A limited memory algorithm for bound constrained optimization, *SIAM J. Scientific Computing*, 16, 1190-1208.
- Caldeira J. F., Smaniotto E.N.**, 2018, The expectations hypothesis of the term structure of interest rates: The Brazilian case revisited, *Applied Economics Letters*, 1-5.
- Chang B.Y., Orosi, G.**, 2017, Equity Option Implied Probability of Default and Equity Recovery Rate, *Journal of Futures Markets*, 37, 599-613.
- Chen S.S., Chen H.Y., Chang C.C., Yang S.L.**, 2013, How do sovereign credit rating changes affect private investment?, *Journal of Banking & Finance*, 37(12), 4820-4833.
- Chen S.S., Chen H.Y., Chang C.C., Yang S.L.**, 2015, The relation between sovereign credit rating revisions and economic growth, *Journal of Banking & Finance*, 64, 90-100.
- Chen S.S., Chen H.Y., Yang S.L., Chang C.C.**, 2016, Output spillovers from changes in sovereign credit ratings, *Journal of International Money and Finance*, 63, C, 48-63.
- Christopher R., Kim S.J., Wu E.**, 2012, Do sovereign credit ratings influence regional stock and bond market interdependencies in emerging countries?, *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 22(4), 1070-1089.
- Coimbra N.**, 2020, Sovereigns at risk: A dynamic model of sovereign debt and banking leverage, *Journal of International Economics*, 124.
- Conrad J., Dittmar R.F., Hameed A.**, 2020, Implied Default Probabilities and Losses Given Default from Option Prices, *Journal of Financial Econometrics*, 18(3), 629-652.
- Cosset J., Roy J.**, 1991, The Determinants of Country Risk Ratings, *Journal of International Business Studies*, 22(1), 135-142.
- Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S. A.**, 1985, A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, 53, 385-407.
- Duffie D., Pedersen L.H., Singleton K. J.**, 2003, Modeling sovereign yield spreads: A case study of Russian debt, *Journal of Finance*, 58, 119-159.
- Eaton J., Gersovitz M.**, 1981, Debt with Potential Repudiation: Theoretical and Empirical Analysis, *The Review of Economic Studies*, 48, 2, 289-309.
- Elkamhi R., Jacobs K., Pan X.**, 2014, The Cross Section of Recovery Rates and Default Probabilities Implied by Credit Default Swap Spreads, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 49(1), 193-220.
- Ferri, G., Liu, L.G., Stiglitz, J.E.**, 1999, The procyclical role of rating agencies: Evidence from the East Asian crisis, Economic Notes, *Economic Review of Banca Monte dei Paschi di Siena*, 28, 335-355.
- Gbongue F.**, 2019a, Modélisation de la courbe des taux zéro-coupon pour le développement de la zone UEMOA, *Revue Economique et Monétaire*, 25.
- Gbongue F.**, 2019b, Amélioration de la méthodologie de construction de la courbe des taux sans risque dans la zone UEMOA, *Assurances et Gestion des risques*, 86(3-4), 125-164.
- Gbongue F.**, 2019c, Modélisation de la structure par terme des primes souveraines implicites dans la zone UEMOA, *Revue Subsaharienne d'Economie et de Finance*, 12, 3-38.
- Gbongue F., Bamba L.**, 2022, Détermination de la règle du taux d'endettement dans la zone UEMOA par la décomposition de la structure par terme des primes souveraines implicites, *Revue Economique et Monétaire*, 32, 9- 48.
- Georgescu G.**, 2014, Public debt, Sovereign Risk and Sustainable Development of Romania, *Procedia Economics and Finance*, 8, 353-361.

- Geske R.**, 1977, The valuation of corporate liabilities as compound options, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12, 541-552.
- Gilchrist S., Wei B., Yue V.Z., Zakrajšek E.**, 2022, Sovereign risk and financial risk, *Journal of International Economics*, 136.
- González-Velasco C., García-López M., González-Fernández M.**, 2022, Does sovereign risk impact banking risk in the Eurozone? Evidence from the COVID-19 pandemic, *Finance Research Letters*, 47(PA).
- Gray D. F., Merton R. C., Bodie Z.**, 2007, Contingent claims approach to measuring and managing sovereign credit risk, *Journal of Investment Management*, 5(4), 5.
- Groba J., Lafuente J.A., Serrano P.**, 2013, The Impact of Distressed Economies in the EU Sovereign Market, *Journal of Banking and Finance*, 37, 7.
- Hantzsche A.**, 2022, Fiscal uncertainty and sovereign credit risk, *European Economic Review*, 148(C).
- Hao X., Sun Q., Xie F.**, 2022, The COVID-19 pandemic, consumption and sovereign credit risk: Cross-country evidence, *Economic Modelling*, 109.
- Haspolat F. B.**, 2015, Analysis of Moody's Sovereign Credit Ratings: Criticisms Towards Rating Agencies Are Still Valid?, *Procedia Economics and Finance*, 30, 283-293.
- Hicks J.R.**, 1939, *Value and capital: an inquiry into some fundamental principles of economy theory*, Oxford Clarendon Press.
- Hladikova H., Radova J.**, 2012, Term structure Modelling by Using Nelson Siegel Model, *European Financial and Accounting Journal*, 7, 2, 36-55.
- Jain D. K., Singh R., Patel A.**, 2020, Mapping of sovereign risks in small island economies: An application of contingent claim approach to fiji, *Cogent Economics & Finance*, 8, 1.
- Karaman S.Y.**, 2022, Covid-19, sovereign risk and monetary policy: Evidence from the European Monetary Union, *Central Bank Review*, 22, 3, 99-107.
- Kasimati E.**, 2011, Did the climb on the Greek sovereign spreads cause the devaluation of euro? *Applied Economics Letters*, 18(9), 851-854.
- Kim S., Wu E.**, 2008, Sovereign Credit Ratings, Capital Flows and Financial Sector Development in Emerging Markets, *Emerging Markets Review*, 9(1), 17-39.
- Kirikaleli D., Gokmenoglu K.K.**, 2020, Sovereign credit risk and economic risk in Turkey: Empirical evidence from a wavelet coherence approach, *Borsa Istanbul Review*, 20, 2, 144-152.
- Kovachev Y., Simeonov D.**, 2014, Yield Curve Fitting with Data from Sovereign Bonds, Bulgarian National Bank.
- Küçüksaraç D., Kazdal A., İbrahim Korkmaz H., Onay Y.**, 2021, A measure of Turkey's sovereign and banking sector credit risk: Asset swap spreads, *Central Bank Review*, 21(2), 49-57.
- Lai W.N.**, 2016, Evaluating the sovereign and household credit risk in Singapore: A contingent claims approach, *Research in International Business and Finance*, 37, 435-447.
- Leland H.E.**, 1994, Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure, *Journal of Finance*, 49, 1213-1252.
- Leland H.E., Toft K.B.**, 1996, Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads, *Journal of Finance*, 51, 987-1019.
- Longstaff F. A.**, 2004, The flight-to-liquidity premium in US Treasury bond prices, *Journal of Business*, 77, 551-526.
- Longstaff F.A., Schwartz E.S.**, 1995, A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt, *Journal of Finance*, 50, 789-819.
- Lozano-Espitia I., Arias-Rodríguez F.**, 2022, The Relationship between Fiscal and Monetary Policies in Colombia: An Empirical Exploration of the Credit Channel, *Latin American Journal of Central Banking*, 3, 4.
- Martellini L., Priaulet P., Priaulet S.**, 2003, *Fixed-Income Securities: Valuation, Risk Management and Portfolio Strategies*, Wiley.
- Merrick J. J.**, 2001, Crisis dynamics of implied default recovery ratios: Evidence from Russia and Argentina, *Journal of Banking and Finance*, 25(10), 1921-1939.
- Merton R.**, 1974, On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates, *Journal of Finance*, 29, 449-470.
- Navas J. F.**, 2005, Yield Curve Fitting with Term Structure Models: Empirical Evidence from the Euro Market, *Revista de Economia Aplicada*, 13, 39.

- Olabisi M., Stein H.**, 2015, Sovereign bond issues: Do African countries pay more to borrow?, *Journal of African Trade*, 2, 1-2, 87-109.
- O'Sullivan C., Papavassiliou V. G.**, 2020, On the term structure of liquidity in the European sovereign bond market, *Journal of Banking & Finance*, 114(C).
- Paluszynski R.**, 2023, Learning about Debt Crises. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 15(1), 106-134.
- Passadore J., Xu Y.**, 2022, Illiquidity in sovereign debt markets, *Journal of International Economics*, 137.
- Piazzesi M.**, 2005, Bond yields and the Federal Reserve, *Journal of Political Economy*, 113(2), 311-344.
- Radelet S., Sachs J.**, 1998, The onset of the East Asian financial crisis, Working Paper No. 6680, Cambridge, MA : National Bureau of Economic Research.
- Reinhart C.M., Rogoff K.S.**, 2004, Serial default and the 'paradox' of rich-to-poor capital flows, *American Economic Review*, 94(2), 53-58.
- Salomao J.**, 2017, Sovereign debt renegotiation and credit default swaps, *Journal of Monetary Economics*, 90, 50-63.
- Stander Y. S.**, 2005, *Yield Curve Modeling*, Palgrave Macmillan, 205 p.
- Thornton J., Vasilakis C.**, 2016, Does inflation targeting reduce sovereign risk? Further evidence, *Finance Research Letters*, 18, 237-241.
- Treepongkaruna S., Wu E.**, 2012, Realizing the volatility impacts of sovereign credit ratings information on equity and currency markets: Evidence from the Asian Financial Crisis, *Research in International Business and Finance*, 26(3), 335-352.
- Vrugt E.B.**, 2011, Estimating Implied Default Probabilities and Recovery Values from sovereign bond prices, *The Journal of Fixed Income*, 21, 5-14.
- Yue V.Z.**, 2010, Sovereign default and debt renegotiation, *Journal of International Economics*, 80(2), 176-187.
- Zhou C.**, 1997, A jump-diffusion approach to modeling credit risk and valuing defaultable securities, Working paper, Federal Reserve Board.

ANNEXES

Le modèle de Weibull :

$$\forall \varsigma_{1,t}'^W = (\alpha_{w,t}^{CS}, \gamma_{w,t}^{CS}) \succ 0 : \begin{cases} \delta_t^{CS}(u, \varsigma_1') = \frac{\gamma_{w,t}^{CS}}{\alpha_{w,t}^{CS}} \left(\frac{u}{\alpha_{w,t}^{CS}} \right)^{\gamma_{w,t}^{CS}-1} \\ S_t^{CS}[m, \varsigma_1'] = e^{-\int_0^m \delta_t^{CS}(u, \varsigma_1') du} = e^{-\left(\frac{m}{\alpha_{w,t}^{CS}}\right)^{\gamma_{w,t}^{CS}}} \end{cases} \quad (6.a)$$

Le modèle de Gumbel :

$$\forall \varsigma_{1,t}'^G = (\alpha_{G,t}^{CS}, \beta_{G,t}^{CS}) \succ 0 : \begin{cases} \delta_t^{CS}(u, \varsigma_1') = \frac{1}{\beta_{G,t}^{CS}} \times \frac{e^{-\frac{[u-\alpha_{G,t}^{CS}]}{\beta_{G,t}^{CS}}}}{e^e - 1} \\ S_t^{CS}[m, \varsigma_1'] = e^{-\int_0^m \delta_t^{CS}(u, \varsigma_1') du} = 1 - e^{-e^{-\frac{[m-\alpha_{G,t}^{CS}]}{\beta_{G,t}^{CS}}}} \end{cases} \quad (6.b)$$

Le modèle Log-Normale :

$$\forall \varsigma_{1,t}'^{LN} = (\beta_{LN,t}^{CS}, \tau_{LN,t}^{CS}) \succ 0 : \begin{cases} \delta_t^{CS}(u, \varsigma_1') = \frac{1}{\beta_{LN,t}^{CS} u} \times \frac{\phi\left[\frac{\ln u - \ln \tau_{LN,t}^{CS}}{\beta_{LN,t}^{CS}}\right]}{\Theta\left[-\frac{\ln u - \ln \tau_{LN,t}^{CS}}{\beta_{LN,t}^{CS}}\right]} \\ S_t^{CS}[m, \varsigma_1'] = e^{-\int_0^m \delta_t^{CS}(u, \varsigma_1') du} = 1 - \Theta\left[\frac{\ln m - \ln \tau_{LN,t}^{CS}}{\beta_{LN,t}^{CS}}\right] \end{cases} \quad (6.c)$$

Le prix théorique dans le modèle de Weibull :

$$\begin{aligned}
 & \hat{P}_2^{k,i}(t, \theta', \hat{\varsigma}, \varsigma_1^W, \lambda) \\
 &= \sum_{m=1}^{\theta'} CF_t^{k,i} \times e^{-m \times \left[\hat{L}_t^{Rf} - \hat{S}_t^{Rf} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\hat{k}_{1,t}}{\hat{\tau}_{1,t}} m\right)}{\frac{\hat{k}_{1,t}}{\hat{\tau}_{1,t}} m} \right] + \hat{C}_t^{Rf} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right)}{\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m} - \exp\left(-\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right) \right] \right]} \\
 & \times \underbrace{\left(e^{-\left(\frac{m}{\alpha_{w,t}^{CS}}\right)^{\gamma_{w,t}^{CS}}} + RR \times \left(e^{-\left(\frac{m-1}{\alpha_{w,t}^{CS}}\right)^{\gamma_{w,t}^{CS}}} - e^{-\left(\frac{m}{\alpha_{w,t}^{CS}}\right)^{\gamma_{w,t}^{CS}}} \right) \right)^{[1+\lambda]}}_{B_t^{PSI}(m, \varsigma')}
 \end{aligned} \tag{7.a}$$

Le prix théorique dans le modèle de Gumbel :

$$\begin{aligned}
 & \hat{P}_2^{k,i}(t, \theta', \hat{\varsigma}, \varsigma_1^G, \lambda) \\
 &= \sum_{m=1}^{\theta'} CF_t^{k,i} \times e^{-m \times \left[\hat{L}_t^{Rf} - \hat{S}_t^{Rf} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\hat{k}_{1,t}}{\hat{\tau}_{1,t}} m\right)}{\frac{\hat{k}_{1,t}}{\hat{\tau}_{1,t}} m} \right] + \hat{C}_t^{Rf} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right)}{\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m} - \exp\left(-\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right) \right] \right]} \\
 & \times \underbrace{\left(\left(1 - e^{-e^{-\frac{[m-\alpha_{G,t}^{CS}]}{\beta_{G,t}^{CS}}}} \right) + RR \times \left(e^{-e^{-\frac{[m-\alpha_{G,t}^{CS}]}{\beta_{G,t}^{CS}}}} - e^{-e^{-\frac{[(m-1)-\alpha_{G,t}^{CS}]}{\beta_{G,t}^{CS}}}} \right) \right)^{[1+\lambda]}}_{B_t^{PSI}(m, \varsigma')}
 \end{aligned} \tag{7.b}$$

Le prix théorique dans le modèle Log-Normale :

$$\begin{aligned}
 & \hat{P}_2^{k,i}(t, \theta', \hat{\zeta}, \zeta_1'^{LN}, \lambda) \\
 &= \sum_{m=1}^{\theta'} CF_t^{k,i} \times \left(\underbrace{\left(1 - \Theta \left[\frac{\ln m - \ln \tau_{LN,t}^{CS}}{\beta_{LN,t}^{CS}} \right] \right)}_{B_t^{CS}[m, \zeta_1'^{LN}]} + \underbrace{RR \times \left(\Theta \left[\frac{\ln m - \ln \tau_{LN,t}^{CS}}{\beta_{LN,t}^{CS}} \right] - \Theta \left[\frac{\ln(m-1) - \ln \tau_{LN,t}^{CS}}{\beta_{LN,t}^{CS}} \right] \right)}_{B_t^{PSI}(m, \zeta')} \right)^{[1+\lambda]} \\
 & \times e^{-m \times \left(\hat{L}_t^{Bf} - \hat{S}_t^{Bf} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\hat{k}_{1,t}}{\hat{\tau}_{1,t}} m\right)}{\frac{\hat{k}_{1,t}}{\hat{\tau}_{1,t}} m} \right] + \hat{C}_t^{Bf} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right)}{\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m} - \exp\left(-\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right) \right] \right)}
 \end{aligned} \tag{7.c}$$

A la date de cotation t , les paramètres à estimer sont $\zeta_{1,t}'^W$, $\zeta_{1,t}'^G$ et $\zeta_{1,t}'^{LN}$ respectivement pour les distributions de Weibull, Gumbel et Log Normale. De plus, les fonctions ϕ et Θ représentent les fonctions de densité et de répartition de la loi normale centrée réduite.

Le modèle de crédit de Weibull :

$$\begin{aligned}
 & \underset{\zeta_{1,t}'^W = (\zeta_{1,t}'^W, \lambda, RR)}{\text{Min}} H_2(\hat{P}) = \underset{\zeta_{1,t}'^W = (\alpha_{w,t}^{CS}, \gamma_{w,t}^{CS}, \lambda, RR)}{\text{Min}} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N_i} \left(\frac{P^{k,i}(t, \theta') - \hat{P}_2^{k,i}(t, \theta', \hat{\zeta}, \zeta_1'^W, \lambda)}{D^{k,i}} \right)^2 \right) \\
 & S.C \quad \begin{cases} 0 \leq \alpha_{w,t}^{CS} \leq 30 \\ 0 \leq \gamma_{w,t}^{CS} \leq 10 \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \\ 0 \leq RR \leq 0,7 \\ B_t^{CS}(0) = 1 \\ B_t^{CS}(100) = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{8.a}$$

Le modèle de crédit de Gumbel :

$$\begin{aligned}
 \underset{\zeta'_{G,t} = (\zeta'_{1,t}, \lambda, RR)}{\text{Min}} H_2(\hat{P}) &= \underset{\zeta'_{G,t} = (\alpha_{G,t}^{CS}, \beta_{G,t}^{CS}, \lambda, RR)}{\text{Min}} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N_i} \left(\frac{P^{k,i}(t, \theta') - \hat{P}_2^{k,i}(t, \theta', \hat{\zeta}, \zeta'_1{}^G, \lambda)}{D^{k,i}} \right)^2 \right) \\
 S.C \quad &\begin{cases} 0 \leq \alpha_{G,t}^{CS} \leq 20 \\ 0 \leq \beta_{G,t}^{CS} \leq 10 \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \\ 0 \leq RR \leq 0,7 \\ B_t^{CS}(0) = 1 \\ B_t^{CS}(100) = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{8.b}$$

Le modèle de crédit Log-Normale :

$$\begin{aligned}
 \underset{\zeta'_{LN,t} = (\zeta'_{1,t}, \lambda, RR)}{\text{Min}} H_2(\hat{P}) &= \underset{\zeta'_{LN,t} = (\beta_{LN,t}^{CS}, \tau_{LN,t}^{CS}, \lambda, RR)}{\text{Min}} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N_i} \left(\frac{P^{k,i}(t, \theta') - \hat{P}_2^{k,i}(t, \theta', \hat{\zeta}, \zeta'_1{}^{LN}, \lambda)}{D^{k,i}} \right)^2 \right) \\
 S.C \quad &\begin{cases} 0 \leq \beta_{LN,t}^{CS} \leq 35 \\ 0 \leq \tau_{LN,t}^{CS} \leq 5 \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \\ 0 \leq RR \leq 0,7 \\ B_t^{CS}(0) = 1 \\ B_t^{CS}(100) = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{8.c}$$

Le modèle de liquidité de Weibull :

$$\forall \zeta'_{2,t}{}^W = (\alpha_{w,t}^{LS}, \gamma_{w,t}^{LS}) > 0, \begin{cases} B_{w,t}^{LS}[m, \zeta'_2] = e^{-\int_0^m \alpha_{w,t}^{LS}(u, \zeta'_2) du} = e^{-\int_0^m \left(\frac{\gamma_{w,t}^{LS}}{\alpha_{w,t}^{LS}} \left(\frac{u}{\alpha_{w,t}^{LS}} \right)^{\frac{LS}{\gamma_{w,t}^{LS}} - 1} \right) du} = e^{-\left(\frac{m}{\alpha_{w,t}^{LS}} \right)^{\gamma_{w,t}^{LS}}} \\ LS_{w,t}[m, \zeta'_2] = -\frac{1}{m} \log(B_{w,t}^{LS}[m, \zeta'_2]) = -\frac{1}{m} \log \left(e^{-\left(\frac{m}{\alpha_{w,t}^{LS}} \right)^{\gamma_{w,t}^{LS}}} \right) \end{cases} \tag{10.a}$$

Le modèle de liquidité de Gumbel :

$$\forall \varsigma'_{2,t} = (\alpha_{g,t}^{LS}, \beta_{g,t}^{LS}) \succ 0 : \begin{cases} B_{g,t}^{LS}[m, \varsigma'_2] = e^{-\int_0^m \delta_{g,t}^{LS}(u, \varsigma'_2) du} = e^{-\int_0^m \frac{1}{\beta_{g,t}^{LS}} \times \frac{e^{-\frac{[u - \alpha_{g,t}^{LS}]}{\beta_{g,t}^{LS}}}}{e^{\frac{[u - \alpha_{g,t}^{LS}]}{\beta_{g,t}^{LS}}} - 1} du} = 1 - e^{-e^{-\frac{[m - \alpha_{g,t}^{LS}]}{\beta_{g,t}^{LS}}}} \\ LS_{g,t}[m, \varsigma'_2] = -\frac{1}{m} \log(B_{g,t}^{LS}[m, \varsigma'_2]) = -\frac{1}{m} \log\left(1 - e^{-e^{-\frac{[m - \alpha_{g,t}^{LS}]}{\beta_{g,t}^{LS}}}}\right) \end{cases} \quad (10.b)$$

Le modèle de liquidité Log-Normale :

$$\forall \varsigma'_{2,t} = (\beta_{LN,t}^{LS}, \tau_{LN,t}^{LS}) \succ 0 : \begin{cases} B_{LN,t}^{LS}[m, \varsigma'_2] = e^{-\int_0^m \delta_{LN,t}^{LS}(u, \varsigma'_2) du} = e^{-\int_0^m \frac{1}{\beta_{LN,t}^{LS}} \times \frac{\phi\left(\frac{\ln u - \ln \tau_{LN,t}^{LS}}{\beta_{LN,t}^{LS}}\right)}{\Theta\left(\frac{\ln u - \ln \tau_{LN,t}^{LS}}{\beta_{LN,t}^{LS}}\right)} du} = 1 - \Theta\left[\frac{\ln m - \ln \tau_{LN,t}^{LS}}{\beta_{LN,t}^{LS}}\right] \\ LS_{LN,t}[m, \varsigma'_2] = -\frac{1}{m} \log(B_{LN,t}^{LS}[m, \varsigma'_2]) = -\frac{1}{m} \log\left(1 - \Theta\left[\frac{\ln m - \ln \tau_{LN,t}^{LS}}{\beta_{LN,t}^{LS}}\right]\right) \end{cases} \quad (10.c)$$

Le prix théorique dans le modèle de liquidité de Weibull :

$$\begin{aligned} \hat{P}_3^{k,i}(t, \theta', \hat{\varsigma}, \hat{\varsigma}'_1, \varsigma_2''') \\ = \sum_{m=1}^{\theta'} CF_t^{k,i} \times e^{-m \times \left[\hat{L}_t^{Rf} - \hat{S}_t^{Rf} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\hat{k}_{1,t}}{\hat{\tau}_{1,t}} m\right)}{\frac{\hat{k}_{1,t}}{\hat{\tau}_{1,t}} m} \right] + \hat{C}_t^{Rf} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right)}{\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m} - \exp\left(-\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right) \right] \right]} \\ \times \underbrace{\left(S_t^{CS}[m, \hat{\varsigma}'_1] + RR_t \times \left(S_t^{CS}[m-1, \hat{\varsigma}'_1] - S_t^{CS}[m, \hat{\varsigma}'_1] \right) \right)}_{B_t^{CS}(m, \hat{\varsigma}'_1)} \times \underbrace{e^{-\left(\frac{m}{\alpha_{w,t}^{LS}}\right)^{\gamma_{w,t}^{LS}}}}_{B_t^{LS}(m, \varsigma_2''')} \end{aligned} \quad (11.a)$$

Le prix théorique dans le modèle de liquidité de Gumbel :

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_3^{k,i} \left(t, \theta', \hat{\zeta}, \hat{\zeta}'_1, \zeta_2'^{LG} \right) \\
 = \sum_{m=1}^{\theta'} CF_t^{k,i} \times e^{-m \times \left(\hat{L}_t^{Bf} - \hat{S}_t^{Bf} \left[\frac{1 - \exp \left(-\frac{\hat{k}_{1,t}}{\hat{\tau}_{1,t}} m \right)}{\frac{\hat{k}_{1,t}}{\hat{\tau}_{1,t}} m} \right] + \hat{C}_t^{Bf} \left[\frac{1 - \exp \left(-\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m \right)}{\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m} - \exp \left(-\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m \right) \right] \right)} \\
 \times \underbrace{\left(S_t^{CS} [m, \hat{\zeta}'_1] + RR_t \times \left(S_t^{CS} [m-1, \hat{\zeta}'_1] - S_t^{CS} [m, \hat{\zeta}'_1] \right) \right)}_{B_t^{CS} (m, \hat{\zeta}'_1)} \times \underbrace{1 - e^{-\frac{[u - \sigma_g^{LS}]}{\beta_g^{LS}}}}_{B_t^{LS} (m, \zeta_2'^W)}
 \end{aligned} \tag{11.b}$$

Le prix théorique dans le modèle Log-Normale :

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_3^{k,i} \left(t, \theta', \hat{\zeta}, \hat{\zeta}'_1, \zeta_2'^{LN} \right) \\
 = \sum_{m=1}^{\theta'} CF_t^{k,i} \times e^{-m \times \left(\hat{L}_t^{Bf} - \hat{S}_t^{Bf} \left[\frac{1 - \exp \left(-\frac{\hat{k}_{1,t}}{\hat{\tau}_{1,t}} m \right)}{\frac{\hat{k}_{1,t}}{\hat{\tau}_{1,t}} m} \right] + \hat{C}_t^{Bf} \left[\frac{1 - \exp \left(-\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m \right)}{\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m} - \exp \left(-\frac{\hat{k}_{2,t}}{\hat{\tau}_{2,t}} m \right) \right] \right)} \\
 \times \underbrace{\left(S_t^{CS} [m, \hat{\zeta}'_1] + RR_t \times \left(S_t^{CS} [m-1, \hat{\zeta}'_1] - S_t^{CS} [m, \hat{\zeta}'_1] \right) \right)}_{B_t^{CS} (m, \hat{\zeta}'_1)} \times \underbrace{1 - \Theta \left[\frac{\ln m - \ln \tau_{LN,t}^{LS}}{\beta_{LN,t}^{LS}} \right]}_{B_t^{LS} (m, \zeta_2'^{LN})}
 \end{aligned} \tag{11.c}$$

Le modèle de liquidité de Weibull :

$$\begin{aligned}
 \underset{\zeta'_{w,2,t} = (\zeta_2'^W, RR)}{\text{Min}} H_3(\hat{P}) = \underset{\zeta'_{w,2,t} = (\alpha_{w,t}^{LS}, \gamma_{w,t}^{LS}, RR)}{\text{Min}} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N_i} \left(\frac{P^{k,i}(t, \theta') - \hat{P}_3^{k,i}(t, \theta', \hat{\zeta}, \hat{\zeta}'_1, \zeta_2'^W)}{D^{k,i}} \right)^2 \right) \\
 S.C \quad \begin{cases} 0 \leq \alpha_{w,t}^{LS} \leq 30 \\ 0 \leq \gamma_{w,t}^{LS} \leq 10 \\ 0 \leq RR \leq 0,7 \\ B_t^{LS}(0) = 1 \\ B_t^{LS}(100) = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{12.a}$$

Le modèle de liquidité de Gumbel :

$$\begin{aligned}
 \underset{\zeta'_{g,2,t} = (\zeta_{2,t}^G, RR)}{\text{Min}} H_3(\hat{P}) &= \underset{\zeta'_{2,t} = (\alpha_{g,t}^{LS}, \beta_{g,t}^{LS}, RR)}{\text{Min}} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N_i} \left(\frac{P^{k,i}(t, \theta') - \hat{P}_3^{k,i}(t, \theta', \hat{\zeta}, \hat{\zeta}', \zeta_{2,t}^G)}{D^{k,i}} \right)^2 \right) \\
 S.C \quad &\begin{cases} 0 \leq \alpha_{g,t}^{LS} \leq 20 \\ 0 \leq \beta_{g,t}^{LS} \leq 10 \\ 0 \leq RR \leq 0,7 \\ B_t^{LS}(0) = 1 \\ B_t^{LS}(100) = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{12.b}$$

Le modèle de liquidité Log-Normale :

$$\begin{aligned}
 \underset{\zeta'_{ln,2,t} = (\zeta_{2,t}^{LN}, RR)}{\text{Min}} H_3(\hat{P}) &= \underset{\zeta'_{2,t} = (\beta_{LN,t}^{LS}, \tau_{LN,t}^{LS}, RR)}{\text{Min}} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N_i} \left(\frac{P^{k,i}(t, \theta') - \hat{P}_3^{k,i}(t, \theta', \hat{\zeta}, \hat{\zeta}', \zeta_{2,t}^{LN})}{D^{k,i}} \right)^2 \right) \\
 S.C \quad &\begin{cases} 0 \leq \beta_{LN,t}^{LS} \leq 35 \\ 0 \leq \tau_{LN,t}^{LS} \leq 5 \\ 0 \leq RR \leq 0,7 \\ B_t^{LS}(0) = 1 \\ B_t^{LS}(100) = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{12.c}$$

Le prix théorique dans le modèle de Weibull :

$$\begin{aligned}
 & \hat{P}_3^{k,i} \left(t, \theta', \hat{\zeta}, \hat{\zeta}', \zeta_2^{W'} \right) \\
 &= \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\theta'} CF_t^{k,i} \times e^{\left(-m \times \left[\hat{L}_t^{R'} - \hat{S}_t^{R'} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{3}{\hat{\tau}_{1,t}} m\right)}{\frac{3}{\hat{\tau}_{1,t}}} \right] + \hat{C}_t^{R'} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right)}{\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}}} - \exp\left(-\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right) \right] \right)} \right. \\ & \times \left(\begin{aligned} & \left(1 - e^{-e^{\left[\frac{m - \hat{\alpha}_{G,t}^{CS}}{\hat{\beta}_{G,t}^{CS}}} \right]}} \right) \\ & + RR \times \left(e^{-e^{\left[\frac{m - \hat{\alpha}_{G,t}^{CS}}{\hat{\beta}_{G,t}^{CS}}} \right]}} - e^{-e^{\left[\frac{(m-1) - \hat{\alpha}_{G,t}^{CS}}{\hat{\beta}_{G,t}^{CS}}} \right]}} \right) \end{aligned} \right) \times \underbrace{e^{\left(-\frac{m}{\hat{\alpha}_{W,t}^{LS}}} \right)^{\frac{LS}{W}}}}_{B_t^{LS}(m, \zeta_2^{W})} \quad \forall m \leq 12 \\ \\ & \sum_{m=1}^{\theta'} CF_t^{k,i} \times e^{\left(-m \times \left[\hat{L}_t^{R'} - \hat{S}_t^{R'} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{3}{\hat{\tau}_{1,t}} m\right)}{\frac{3}{\hat{\tau}_{1,t}}} \right] + \hat{C}_t^{R'} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right)}{\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}}} - \exp\left(-\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right) \right] \right)} \right) \\ & \times \left(\begin{aligned} & \left(1 - \Theta \left[\frac{\ln m - \ln \hat{\tau}_{LN,t}^{CS}}{\hat{\beta}_{LN,t}^{CS}} \right] \right) \\ & + RR \times \left(\Theta \left[\frac{\ln m - \ln \hat{\tau}_{LN,t}^{CS}}{\hat{\beta}_{LN,t}^{CS}} \right] - \Theta \left[\frac{\ln(m-1) - \ln \hat{\tau}_{LN,t}^{CS}}{\hat{\beta}_{LN,t}^{CS}} \right] \right) \end{aligned} \right) \times \underbrace{e^{\left(-\frac{m}{\hat{\alpha}_{W,t}^{LS}}} \right)^{\frac{LS}{W}}}}_{B_t^{LS}(m, \zeta_2^{W})} \quad \forall m > 12 \\ \\ & \underbrace{\left(\dots \right)}_{B^{CS}[m, \hat{\zeta}'_{1,G}]} \quad \underbrace{\left(\dots \right)}_{B^{CS}[m, \hat{\zeta}'_{1,LN}]} \end{aligned} \right. \quad (13.a)
 \end{aligned}$$

Le prix théorique dans le modèle de Gumbel :

$$\begin{aligned}
 & \hat{P}_3^{k,i}(t, \theta', \hat{\varsigma}, \hat{\varsigma}_1', \hat{\varsigma}_2'^W) \\
 &= \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\theta'} CF_t^{k,i} \times e^{-m \times \left[\hat{\tau}_t^{R'} - \hat{\varsigma}_t^{R'} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{3}{\hat{\tau}_{1,t}} m\right)}{\frac{3}{\hat{\tau}_{1,t}} m} \right] + \hat{C}_t^{R'} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right)}{\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}} m} - \exp\left(-\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right) \right] \right]} \\ & \times \left(\begin{aligned} & \left(1 - e^{-\frac{\left[m - \hat{\alpha}_{G,t}^{CS} \right]}{\hat{\beta}_{G,t}^{CS}}} \right) \\ & + RR \times \left(e^{-\frac{\left[m - \hat{\alpha}_{G,t}^{CS} \right]}{\hat{\beta}_{G,t}^{CS}}} - e^{-\frac{\left[(m-1) - \hat{\alpha}_{G,t}^{CS} \right]}{\hat{\beta}_{G,t}^{CS}}} \right) \end{aligned} \right) \times \underbrace{\left(1 - e^{-\frac{\left[u - \hat{\alpha}_{G,t}^{LS} \right]}{\hat{\beta}_{G,t}^{LS}}} \right)}_{\hat{B}_t^{LS}(m, \hat{\varsigma}_2'^W)} \quad \forall m \leq 12 \\ & \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{\theta'} CF_t^{k,i} \times e^{-m \times \left[\hat{\tau}_t^{R'} - \hat{\varsigma}_t^{R'} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{3}{\hat{\tau}_{1,t}} m\right)}{\frac{3}{\hat{\tau}_{1,t}} m} \right] + \hat{C}_t^{R'} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right)}{\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}} m} - \exp\left(-\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right) \right] \right]}_{\hat{B}^{CS}[m, \hat{\varsigma}_1', \hat{G}]} \right) \times \left(\begin{aligned} & \left(1 - \Theta \left[\frac{\ln m - \ln \hat{\tau}_{LN,t}^{CS}}{\hat{\beta}_{LN,t}^{CS}} \right] \right) \\ & + RR \times \left(\Theta \left[\frac{\ln m - \ln \hat{\tau}_{LN,t}^{CS}}{\hat{\beta}_{LN,t}^{CS}} \right] - \Theta \left[\frac{\ln(m-1) - \ln \hat{\tau}_{LN,t}^{CS}}{\hat{\beta}_{LN,t}^{CS}} \right] \right) \end{aligned} \right) \times \underbrace{\left(1 - e^{-\frac{\left[u - \hat{\alpha}_{G,t}^{LS} \right]}{\hat{\beta}_{G,t}^{LS}}} \right)}_{\hat{B}_t^{LS}(m, \hat{\varsigma}_2'^W)} \quad \forall m > 12 \end{aligned} \right. \quad (13.b)
 \end{aligned}$$

Le prix théorique dans le modèle Log-Normale :

$$\begin{aligned}
 & \hat{P}_3^{k,i}(t, \theta', \hat{\zeta}, \hat{\zeta}_1', \zeta_2'^W) \\
 &= \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\theta'} CF_t^{k,i} \times e^{\left[-m \times \left[\hat{R}_t^{R'} - \hat{S}_t^{R'} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{3}{\hat{\tau}_{1,t}} m\right)}{\frac{3}{\hat{\tau}_{1,t}} m} \right] + \hat{C}_t^{R'} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right)}{\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}} m} - \exp\left(-\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right) \right] \right]} \right. \\ & \times \left(\begin{aligned} & \left(1 - e^{-e^{\frac{-(m - \hat{\sigma}_{G,t}^{CS})}{\hat{\beta}_{G,t}^{CS}}}} \right) \\ & + RR \times \left(e^{-e^{\frac{-(m - \hat{\sigma}_{G,t}^{CS})}{\hat{\beta}_{G,t}^{CS}}}} - e^{-e^{\frac{-(m-1) - \hat{\sigma}_{G,t}^{CS}}{\hat{\beta}_{G,t}^{CS}}}} \right) \end{aligned} \right) \times 1 - \Theta \left[\frac{\ln m - \ln \tau_{LN,t}^{LS}}{\beta_{LN,t}^{LS}} \right] \quad \forall m \leq 12 \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\hat{B}^{CS}[m, \hat{\sigma}_t, \sigma]} \end{aligned} \right. \\ & \left. \sum_{m=1}^{\theta'} CF_t^{k,i} \times e^{\left[-m \times \left[\hat{R}_t^{R'} - \hat{S}_t^{R'} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{3}{\hat{\tau}_{1,t}} m\right)}{\frac{3}{\hat{\tau}_{1,t}} m} \right] + \hat{C}_t^{R'} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right)}{\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}} m} - \exp\left(-\frac{2}{\hat{\tau}_{2,t}} m\right) \right] \right]} \right. \right. \\ & \times \left(\begin{aligned} & \left(1 - \Theta \left[\frac{\ln m - \ln \hat{\tau}_{LN,t}^{CS}}{\hat{\beta}_{LN,t}^{CS}} \right] \right) \\ & + RR \times \left(\Theta \left[\frac{\ln m - \ln \hat{\tau}_{LN,t}^{CS}}{\hat{\beta}_{LN,t}^{CS}} \right] - \Theta \left[\frac{\ln(m-1) - \ln \hat{\tau}_{LN,t}^{CS}}{\hat{\beta}_{LN,t}^{CS}} \right] \right) \end{aligned} \right) \times 1 - \Theta \left[\frac{\ln m - \ln \tau_{LN,t}^{LS}}{\beta_{LN,t}^{LS}} \right] \quad \forall m > 12 \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\hat{B}^{CS}[m, \hat{\sigma}_{1LN}]} \end{aligned} \right\} \quad (13.c)
 \end{aligned}$$

Tableau 6. Statistiques descriptives

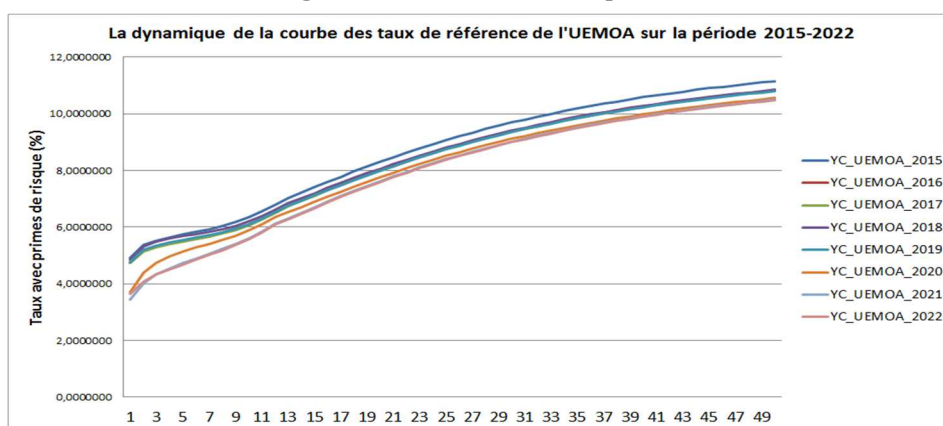
Date de cotation	Emetteur	N	Prix de marché moyen	Coupon moyen (%)	Durée de vie résiduelle (Année)
31/12/2015	Côte d'Ivoire	8	102,10	6,34	3,60
	Sénégal	3	101,20	6,57	5,65
	Burkina Faso	2	100,37	6,50	2,95
	Benin	1	100,92	6,50	0,86
	Togo	1	105,17	6,50	0,21
30/12/2016	Côte d'Ivoire	9	102,33	6,22	5,34
	Sénégal	4	101,02	6,50	5,71
	Burkina Faso	1	100,56	6,50	3,92
	Mali	1	103,75	6,20	6,40
29/12/2017	Côte d'Ivoire	9	102,31	6,07	6,64
	Sénégal	4	101,17	6,50	4,72
	Burkina Faso	2	101,61	6,50	6,26
	Benin	1	104,74	6,50	9,27
	Mali	2	104,29	6,35	5,86
31/12/2018	Côte d'Ivoire	12	101,62	6,11	6,55
	Sénégal	4	100,94	6,50	3,71
	Burkina Faso	3	100,86	6,50	5,33
	Benin	1	101,30	6,50	7,59
	Mali	2	103,84	6,35	4,85
31/12/2019	Togo	1	102,95	6,90	4,57
	Côte d'Ivoire	17	102,26	5,98	5,81
	Sénégal	3	101,87	6,43	3,63
	Burkina Faso	7	101,15	6,50	5,63
	Benin	2	103,66	6,50	6,60
	Mali	4	103,15	6,42	5,25
	Togo	1	103,96	6,90	3,57
31/12/2020	Niger	2	104,69	6,50	6,42
	Côte d'Ivoire	37	103,38	5,89	6,34
	Sénégal	3	104,16	6,43	2,46
	Burkina Faso	8	102,68	6,50	6,13
	Benin	3	104,54	6,50	4,65
	Mali	5	102,82	6,44	4,85
	Niger	2	109,83	6,50	5,41
31/12/2021	Côte d'Ivoire	49	102,93	5,83	5,85
	Sénégal	2	106,68	6,40	2,49
	Burkina Faso	10	105,43	6,50	5,70
	Benin	1	102,28	6,50	6,65
	Mali	7	102,82	6,46	4,92
	Niger	4	109,40	6,45	6,02
30/12/2022	Côte d'Ivoire	52	104,32	5,81	5,67
	Sénégal	2	107,33	6,40	1,49
	Burkina Faso	10	105,38	6,50	4,70
	Benin	3	102,28	5,95	13,01
	Mali	7	104,47	6,46	3,92
	Niger	5	109,40	6,39	6,30

Source : Bourse régionale des valeurs mobilières (BRVM).

A - Liste des instruments obligataires

Pays	Instruments obligataires
Côte d'Ivoire	TPCI.O17, TPCI.O19, TPCI.O20, TPCI.O21, TPCI.O22, TPCI.O23, TPCI.O24, TPCI.O25, TPCI.O26, TPCI.O27, TPCI.O28, TPCI.O29, TPCI.O30, TPCI.O31, TPCI.O33, TPCI.O34, TPCI.O35, TPCI.O36, TPCI.O37, TPCI.O38, TPCI.O39, TPCI.O40, TPCI.O41, TPCI.O42, TPCI.O43, TPCI.O44, TPCI.O45, TPCI.O46, TPCI.O47, TPCI.O48, TPCI.O49, TPCI.O50, TPCI.O51, TPCI.O52, TPCI.O53, TPCI.O54, TPCI.O55, TPCI.O56, TPCI.O57, TPCI.O58, TPCI.O59, TPCI.O60, TPCI.O61, TPCI.O62, TPCI.O63, TPCI.O64, TPCI.O65, TPCI.O66, TPCI.O67, TPCI.O68, TPCI.O69, TPCI.O70.
Burkina Faso	TPBF.O4, TPBF.O5, TPBF.O6, TPBF.O7, TPBF.O8, TPBF.O9, TPBF.O10, TPBF.O11, TPBF.O12, TPBF.O13.
Mali	EOM.O1, EOM.O2, EOM.O3, EOM.O4, EOM.O5, EOM.O6, EOM.O7.
Niger	TPNE.O1, TPNE.O2, TPNE.O3, TPNE.O4, TPNE.O5.
Bénin	TPBJ.O3, TPBJ.O4, TPBJ.O5.
Sénégal	EOS.O5, EOS.O7.

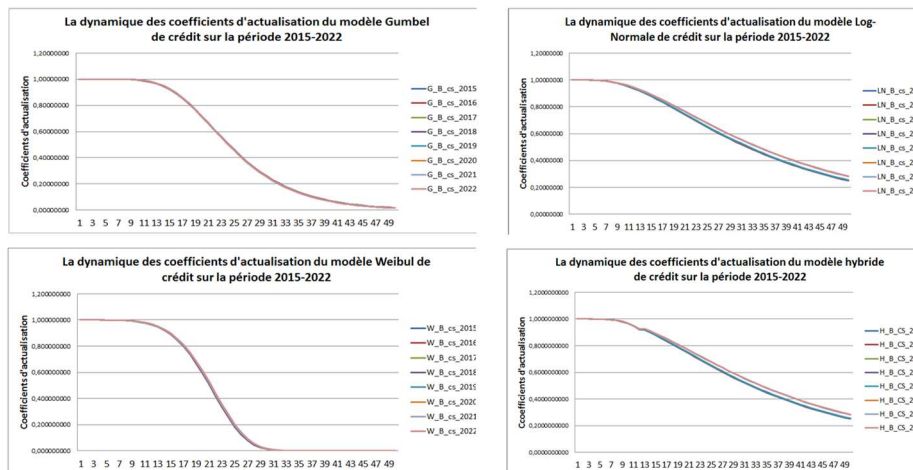
Source: Bourse régionale des valeurs mobilières (BRVM).

B - La dynamique de la structure par terme des taux de référence du marché financier régional de l'UEMOA sur la période 2015-2022

Structure par terme obtenue en sommant la courbe des taux sans risque, ainsi que les primes souveraines de crédit et liquidité issues des modèles hybrides. Il s'agit de la courbe de référence pour les émissions de titres publiques et/ou les échanges d'instruments financiers sur le marché financier régional de la zone UEMOA.

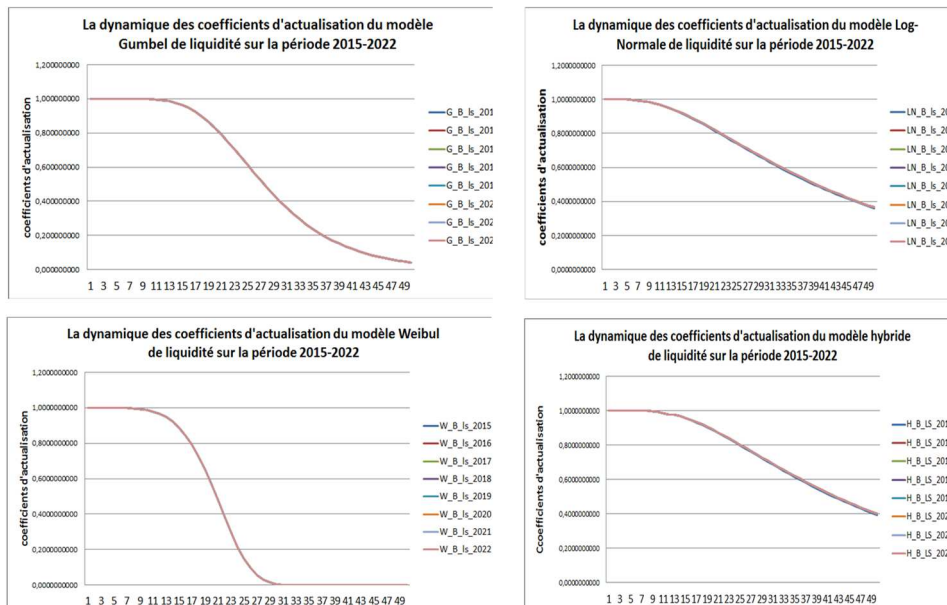
Source: Auteurs.

C – La dynamique des coefficients d'actualisation des modèles de risque de crédit sur la période 2015-2022



Source: Auteurs.

D – La dynamique des coefficients d'actualisation des modèles de risque de liquidité sur la période 2015-2022



Source: Auteurs.

The hybrid model of the term structure of sovereign credit and liquidity premia in the WAEMU zone

Abstract - In the current context, public debt sustainability has become a crucial issue for most African countries. In WAEMU countries, this sustainability is affected by implicit sovereign premiums (ISP) on the regional financial market (RFM), which are an essential measure of the perception of implicit risk of sovereign issuers. This paper brings methodological innovations to the work of Merrick (2001) and Gbongué and Bamba (2022), by proposing hybrid models for the determination of indirect ISPs and, in particular, a solution to the calibration of the liquidity risk functional, considerably improving the estimation of the coefficient of variation, as well as the implied recovery rate in case of sovereign default. With data covering the period 2015-2022, the empirical application reveals that the term structures of the sovereign credit and liquidity premia of WAEMU countries are stable when estimated by hybrid models, composed of Gumbel interpolation and Log-Normal extrapolation models, which improves the visibility of the medium- and long-term RFM. These ISPs are sensitive to monetary policy decisions and risk-free yield curve parameters, the calibration of which deserves particular attention. The study therefore recommends that the monetary authorities should pursue the objective of price stability and that there should be better coordination between monetary and fiscal policies to ensure the stability of the market yield curve and hence the efficient management of public finances in the Union.

Key-words

Public debt
Hybrid models
Sovereign credit and liquidity premia
WAEMU
