

## AUTOCORRÉLATION SPATIALE DES ERREURS ET ERREURS DE MESURE : QUELLES INTERACTIONS ?

Julie LE GALLO\* et Jan MUTL\*\*

**Résumé** - Dans cet article, nous dérivons les distributions asymptotiques de l'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires (MCO) et de l'estimateur des Moindres Carrés Généralisés (MCG) dans un modèle comportant une autocorrélation spatiale des erreurs et une erreur de mesure affectant la variable explicative. Nous spécifions analytiquement la forme du biais asymptotique relatif et de l'efficacité asymptotique relative entre les deux estimateurs compte tenu de la structure du modèle. Ceci nous permet de montrer que la présence simultanée de l'autocorrélation spatiale et d'une erreur de mesure sur la variable explicative conduit à un arbitrage entre le biais et la variance. Une estimation par les MCG permet de réduire le biais mais de façon très limitée. Cependant, il existe de nombreuses combinaisons de paramètres pour lesquelles cette réduction du biais se fait au détriment d'une perte d'efficacité.

**Mots-clés** - AUTOCORRÉLATION SPATIALE, ERREURS DE MESURE, PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES

**Classification JEL** - C13, C21

---

\*CRESE, Université de Franche-Comté, France, jlegallo@univ-fcomte.fr

\*\* EBS Business School, Allemagne, jan.mutl@ebs.edu

## 1. INTRODUCTION

Les modèles en coupe transversale sur données géoréférencées sont très souvent caractérisés par un phénomène d'autocorrélation spatiale (Anselin, 1988 ; Le Gallo, 2002 ; LeSage et Pace, 2009 ; Le Gallo, 2014). Cette dernière peut être la conséquence d'interactions spatiales ou d'effets de pairs entre individus géographiquement proches ou encore provenir d'un problème de spécification du modèle, comme la présence de variables omises spatialement autocorrélées ou une mauvaise spécification de la forme fonctionnelle. Les méthodes d'estimation et d'inférence des modèles comportant une autocorrélation spatiale sous la forme d'une variable endogène décalée ou d'une autocorrélation spatiale des erreurs sont maintenant bien établies (voir Arbia, 2014 ; Dubé et Legros, 2014 ; Elhorst, 2014 ; Fisher et Nijkamp, 2014 pour des manuels récents).

D'autres problèmes économétriques sont fréquents dans les modèles en coupe transversale. Ainsi, une variable explicative peut être endogène si elle est corrélée avec le terme d'erreur. L'endogénéité des variables explicatives peut avoir plusieurs sources : biais de simultanéité, variables omises corrélées avec les variables présentes dans le modèle ou encore erreurs de mesure. Si les conséquences de l'endogénéité de variables explicatives sont bien connues, la présence simultanée d'autocorrélation spatiale et de variables endogènes n'a que récemment fait l'objet d'études spécifiques. Ainsi, Fingleton et Le Gallo (2007, 2008) proposent une méthode d'estimation basée sur les moments généralisés pour des modèles comportant à la fois des variables explicatives endogènes et une autocorrélation spatiale sous la forme d'une variable spatiale décalée et/ou d'une autocorrélation spatiale des erreurs. Les propriétés asymptotiques de cette méthode d'estimation sont dérivées par Drukker et al. (2013). A travers des simulations, Fingleton et Le Gallo (2009) montrent que le modèle de Durbin spatial est à même de limiter les biais liés à la présence de variables endogènes. Enfin, Jin et Lee (2013) et Liu et Lee (2013) s'intéressent au cas où de nombreux instruments existent.

Dans cet article, nous nous attachons au cas spécifique de l'endogénéité provenant d'une erreur de mesure. Ces dernières sont fréquentes en économétrie appliquée. Par exemple, Temple (1998) a montré que les paramètres estimés dans les modèles de convergence et notamment la vitesse de convergence étaient très sensibles aux problèmes d'erreurs de mesure sur les données de revenu par tête. Lorsque l'erreur de mesure affecte uniquement la variable dépendante, elle est absorbée par le terme d'erreur et n'a pas d'effet sur la convergence des estimateurs des paramètres inconnus. Cependant, lorsqu'une variable explicative est mesurée avec erreur, alors les estimateurs des MCO obtenus en utilisant la variable observée sont affectés d'un biais d'atténuation : ils sont asymptotiquement sous-estimés. Les autres coefficients du modèle peuvent également être affectés : c'est le biais de contamination (Greene, 2011).

La question des erreurs de mesure dans le cadre des modèles d'économétrie spatiale reste aujourd'hui très largement inexplorée. Le Gallo et Fingleton (2012) ont analysé les effets d'une erreur de mesure sur le biais et l'efficacité de différents estimateurs dans des modèles d'économétrie spatiale. Sur la base

de simulations de Monte-Carlo, ils ont montré que les erreurs de mesure combinées à un processus spatial sur les erreurs, peuvent être, de façon quelque peu paradoxale, mieux traitées par une méthode d'estimation ignorant l'autocorrélation spatiale. Ces résultats font écho à ceux obtenus par Dagenais (1994) qui, dans un cadre de séries temporelles, montre théoriquement que dans certaines circonstances, le biais de l'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires (MCO) pouvait même être amélioré par la présence de corrélation sérielle dans les termes d'erreurs.

Dans ce contexte, l'objectif est de revenir sur les propriétés asymptotiques des estimateurs en présence d'erreurs de mesure dans un cadre spatial. Nous nous concentrons dans cet article sur le cas d'une autocorrélation spatiale affectant les termes d'erreurs d'une régression. Notre objectif est alors de dériver les probabilités limite et la distribution asymptotique des estimateurs des MCO et des Moindres Carrés Généralisés (MCG) en présence d'autocorrélation spatiale des erreurs et d'erreur de mesure sur la variable expliquée afin d'évaluer comment ces deux effets interagissent.

Cet article est organisé de la façon suivante. Dans une première partie, nous présentons le modèle et les hypothèses. Ensuite, nous dérivons les distributions asymptotiques des estimateurs des MCO et des MCG. Enfin, nous comparons les biais et l'efficacité asymptotiques de ces deux estimateurs à l'aide de représentations graphiques. La dernière section conclut et offre quelques perspectives de recherche futures.

## 2. LE MODÈLE ET LES HYPOTHÈSES

Dans un premier temps (2.1.), nous précisons la spécification et les hypothèses du modèle avec autocorrélation spatiale des erreurs. Dans un second temps, nous introduisons une erreur de mesure sur la variable expliquée (2.2.).

### 2.1. Le modèle avec autocorrélation spatiale des erreurs

Sans perte de généralité, on considère un modèle de régression linéaire avec une seule variable explicative :

$$y_n = X_n \beta + u_n \quad (1)$$

où  $n$  est le nombre d'observations en coupe transversale ;  $y_n$  est le vecteur de dimension  $(n,1)$  comportant les observations sur la variable expliquée ;  $X_n$  est le vecteur de dimension  $(n,1)$  comportant les observations sur la variable explicative et  $u_n$  est le vecteur de dimension  $(n,1)$  des termes d'erreurs. Les termes d'erreurs suivent un processus spatial autorégressif (SAR) à l'ordre 1 :

$$u_n = \lambda W_n u_n + \varepsilon_n \quad (2)$$

où  $W_n$  est une matrice carrée de dimension  $n$  et qui représente la structure de connectivité entre les observations.

On pose les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 1** - sur  $\varepsilon_n$

Les éléments de  $\varepsilon_n$  sont identiquement et indépendamment distribués avec des moments absolument finis d'ordre  $4 + \delta_\varepsilon$  pour un  $\delta_\varepsilon > 0$ . En outre,  $E(\varepsilon_n) = \sigma_\varepsilon^2 > 0$ .

**Hypothèse 2** - sur  $W_n$

Les éléments de la matrice de poids  $W_n$  sont non-stochastiques avec :

- (a)  $w_{ii,n} = 0$
- (b) Les sommes absolues en ligne et en colonne des matrices  $W_n$  et  $(I_n - \lambda W_n)^{-1}$  sont uniformément bornées en valeur absolue, i.e.  $\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \leq k \leq \infty$ , où  $k$  ne dépend pas de  $n$  (mais peut dépendre des paramètres du modèle, i.e.  $\lambda$ ) et  $a_{ij}$  dénotent les éléments des matrices  $W_n$  et  $(I_n - \lambda W_n)^{-1}$ .
- (c)  $|\lambda| \leq k_\lambda < 1 / \lambda_{\max}(W_n)$ , où  $\lambda_{\max}(\cdot)$  dénote la valeur propre maximale en valeur absolue de  $W_n$ .

L'hypothèse (2a) est une normalisation typique en économétrie spatiale. Les hypothèses (2b) et (c) sont satisfaites dans la plupart des applications empiriques et sont vérifiées si, par exemple, la matrice de poids  $W_n$  est standardisée en ligne et si  $|\lambda| \leq k_\lambda < 1$  respectivement. Ces hypothèses sont typiquement imposées dans les modèles spatiaux (Kelejian et Prucha, 1999) et limitent l'étendue de l'autocorrélation spatiale entre les unités en coupe transversale. Elles sont satisfaites si la matrice de poids est creuse (i.e. chaque observation n'a qu'un nombre limité d'observations voisines). On note que de (2c), on déduit que la matrice  $(I_n - \lambda W_n)^{-1}$  est inversible.

**2.2. Erreurs de mesure**

On considère maintenant la situation où la variable non-stochastique  $X_n$  est en fait non-observable mais mesurée avec erreur. La variable observée  $\tilde{X}_n$  est la somme de la variable  $X_n$  non observée et d'un terme d'erreur  $\xi_n$  :

$$\tilde{X}_n = X_n + \xi_n \quad (3)$$

On suppose également que les erreurs de mesure sont spatialement autocorrélées :

$$\xi_n = \rho M_n \xi_n + v_n \quad (4)$$

Nous faisons alors les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 3 - sur  $v_n$**

*La variable exogène  $X_n$  est non-stochastique et composée d'éléments uniformément bornés en valeur absolue.*

**Hypothèse 4 - sur  $\xi_n$**

- (a) *Les innovations  $v_n$  dans les erreurs de mesure sont d'espérance nulle et sont identiquement et indépendamment distribués avec des moments absolument finis d'ordre  $4 + \delta_v$  pour un  $\delta_v > 0$ . En outre, les éléments de  $v_n$  et de  $\xi_n$  sont indépendants et  $E(v_{i,n}^2) = \sigma_v^2$ .*
- (b) *La matrice de poids  $M_n$  et le paramètre spatial décalé correspondant  $\rho$  satisfont l'hypothèse 2.*
- (c)  *$\sigma_\xi^2 := \text{plim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \xi_n' \xi_n$  existe et est fini et  $\sigma_X^2 = \text{plim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \tilde{X}_n' \tilde{X}_n$  existe et est strictement positif et fini.*

Notons que l'existence et le fait que  $\sigma_\xi^2$  est borné est une conséquence des hypothèses (4a) et (b) et du lemme de Chebyshev. En outre, dans la mesure où les éléments de  $X_n$  sont bornés, cela implique que  $\sigma_X^2$  existe et est fini. Cependant, afin de garantir l'identification asymptotique du modèle avec erreurs de mesure, il est nécessaire de supposer en outre que  $\sigma_X^2$  est inversible.

### 3. PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES ESTIMATEURS DES MCO ET DES MCG

Nous considérons dans cette section les propriétés en échantillon (3.1.) et les propriétés asymptotiques (3.2.) des estimateurs des MCO et des MCG en présence d'autocorrélation spatiale et d'erreurs de mesure sur la variable explicative.

#### 3.1. Les estimateurs des MCO et des MCG

Dans la mesure où  $X_n$  n'est pas observé, le modèle estimé est :

$$y_n = \tilde{X}_n \beta + \tilde{u}_n \quad (5)$$

où  $\tilde{u}_n = u_n + X_n \beta - \tilde{X}_n \beta = u_n - \xi_n \beta$ . Selon qu'on considère l'autocorrélation dans les termes d'erreurs ou non, on peut estimer ce modèle par les MCO ou par les MCG. Les estimateurs des MCO et des MCG ont les formes suivantes :

$$\hat{\beta}_{MCO} = \left( \tilde{X}_n' \tilde{X}_n \right)^{-1} \tilde{X}_n' y_n \quad (6a)$$

$$\hat{\beta}_{MCG} = \left( \tilde{X}_n' \Omega_{u,n}^{-1} \tilde{X}_n \right)^{-1} \tilde{X}_n' \Omega_{u,n}^{-1} y_n \quad (6b)$$

avec  $\Omega_{u,n} = \mathbf{E}(\mathbf{u}_n \mathbf{u}_n') = \sigma_\varepsilon^2 (\mathbf{I}_n - \lambda \mathbf{W}_n)^{-1} (\mathbf{I}_n - \lambda \mathbf{W}_n')$ .

Notons qu'il s'agit bien de l'estimateur des MCG purs et non réalisables car le paramètre  $\lambda$  est inconnu. En pratique, il faudrait également estimer ce paramètre. Cependant, nous considérons ici qu'il est connu afin d'étudier les propriétés asymptotiques de l'estimateur des MCG dans le meilleur des cas.

Ces deux estimateurs sont biaisés en présence d'erreurs de mesure puisque les conditions sur les moments sous-jacentes ne sont plus vérifiées. Dans le cas de l'estimation par les MCO en effet, la condition sur les moments basant l'estimation est :  $E(\tilde{X}_n' \tilde{u}_n) = 0$ . Cependant, compte tenu de la présence d'erreurs de mesure, nous avons :

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}_n' \tilde{u}_n) &= E\left[ (X_n + \xi_n)' (u_n - \xi_n \beta) \right] \\ &= E[X_n' u_n] - E[X_n' \xi_n] \beta + E[\xi_n' u_n] - E[\xi_n' \xi_n] \beta \\ &= -E[\xi_n' \xi_n] \beta = -n \sigma_{\xi,n}^2 \beta \\ &\neq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

où  $\sigma_{\xi,n}^2 := n^{-1} \mathbf{E}(\xi_n' \xi_n)$ .

Un résultat analogue peut être prouvé pour l'estimateur des MCG.

### 3.2. Propriétés asymptotiques

Dans cette partie, nous dérivons les propriétés asymptotiques de l'estimateur des MCO et des MCG.

Tout d'abord, afin de simplifier les expressions pour les résultats asymptotiques de l'estimateur des MCO, basé sur la condition  $E(\tilde{X}_n' \tilde{u}_n) = 0$ , nous sup-

posons que la matrice des variances-covariances de cette condition converge et imposons l'hypothèse suivante :

### Hypothèse 5

$$\sigma_{\tilde{X}'\tilde{u}}^2 = p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \tilde{X}'_n \tilde{u}_n \tilde{u}'_n \tilde{X}_n \text{ existe.}$$

Nous aurons besoin par la suite des éléments suivants :

$$m_1 := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{tr} \left[ \left( I_n - \rho M'_n \right)^{-1} \left( I_n - \rho M_n \right)^{-1} \right] \quad (8a)$$

$$m_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} X'_n \left( I_n - \rho M'_n \right)^{-1} \cdot \text{diag} \left[ \left( I_n - \rho M'_n \right)^{-1} \left( I_n - \rho M_n \right)^{-1} \right] \quad (8b)$$

Ces quantités sont des fonctions des données et ne dépendent que du seul paramètre  $\rho$  qui mesure l'autocorrélation spatiale dans les erreurs de mesure. Si  $\rho = 0$ , alors  $m_1 = 1$  et  $m_2 = \bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$ .

Ensuite, afin de garantir l'existence et l'identification asymptotiques de l'estimateur des MCG, nous ajoutons l'hypothèse suivante :

### Hypothèse 6

$$\sigma_{\xi^*}^2 = p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \xi'_n \Omega_{u,n}^{-1} \xi_n \text{ existe et est fini et}$$

$$\sigma_{\tilde{X}^*}^2 = p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \tilde{X}'_n \Omega_{u,n}^{-1} \tilde{X}_n \text{ existe, est fini et est inversible.}$$

En outre la quantité

$$m_3 = p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \tilde{X}'_n \left( I_n - \lambda W_n \right)^{-1} \left( I_n - \rho M_n \right)^{-1} \left( I_n - \rho M'_n \right)^{-1} \left( I_n - \lambda W'_n \right)^{-1} \tilde{X}_n$$

existe et est finie.

Nous observons que :

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \tilde{X}'_n \Omega_{u,n}^{-1} \tilde{X}_n = p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} X'_n \Omega_{u,n}^{-1} X_n + p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \xi'_n \Omega_{u,n}^{-1} \xi_n \quad (9)$$

En conséquence, l'hypothèse 6 implique que  $\sigma_{\tilde{X}^*}^2 := p \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \tilde{X}'_n \Omega_{u,n}^{-1} \tilde{X}_n$  existe et est fini. La dernière partie de l'hypothèse 6 est nécessaire pour permettre l'écriture de la matrice des variances-covariances de l'estimateur des MCG.

Enfin, compte tenu de ces propriétés, nous pouvons démontrer les théorèmes suivants<sup>1</sup> :

**Théorème 1** – *Distribution asymptotique de l'estimateur des MCO*

Sous les hypothèses 1 à 6, on a :

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{MCO} - \beta) \xrightarrow{d} N(\Delta_{MCO}, \Omega_{MCO}) \quad (10a)$$

Le biais asymptotique est donné par :

$$\Delta_{MCO} = -\frac{\sigma_{\xi}^2}{\sigma_{\bar{X}}^2} \beta \quad (10b)$$

La matrice de variance-covariance asymptotique est donnée par :

$$\Omega_{MCO} = \sigma_{\bar{X}}^{-4} \sigma_{\bar{X}\bar{u}}^2 \quad (10c)$$

où  $\sigma_{\varepsilon}^2$ ,  $\sigma_{\bar{X}}^2$  ont été définis auparavant et  $\sigma_{\bar{X}\bar{u}}^2 = \sigma_X^2 (\sigma_{\varepsilon}^2 + \sigma_v^2 \beta^2) + \sigma_v^2 \beta^2 - 2\sigma_v^3 \beta^2 \bar{x}$

avec  $\sigma_X^2 := \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) X_n' X_n$ .

Nous donnons également un théorème similaire pour l'estimateur des MCG :

**Théorème 2** – *Distribution asymptotique de l'estimateur des MCG*

Sous les hypothèses 1 à 6, on a :

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{MCG} - \beta) \xrightarrow{d} N(\Delta_{MCG}, \Omega_{MCG}) \quad (11a)$$

Le biais asymptotique est donné par :

$$\Delta_{MCG} = -\frac{\sigma_{\xi^*}^2}{\sigma_{\bar{X}^*}^2} \beta \quad (11b)$$

La matrice de variance-covariance asymptotique est donnée par :

$$\Omega_{MCG} = \sigma_{\bar{X}^*}^{-4} \sigma_{\bar{X}^* \bar{u}^*}^2 \quad (11c)$$

où  $\sigma_{\xi^*}^2$  et  $\sigma_{\bar{X}^*}^2$  ont été définis précédemment et  $\sigma_{\bar{X}^* \bar{u}^*}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\varepsilon}^{-2} \beta^2 \sigma_v^2 m_3$ .

Nous retrouvons le fait qu'en présence d'erreurs de mesure sur une variable explicative, le coefficient associé est affecté d'un biais d'atténuation. Ces diffé-

<sup>1</sup> Pour des raisons de place, les démonstrations des théorèmes 1 et 2 ne sont pas reportées ici. Elles sont disponibles sur demande auprès des auteurs.



rentes formules nous permettent de comparer les biais et RMSE asymptotiques des estimateurs des MCO et MCG.

#### 4. COMPARAISON DES BIAIS ET EFFICIENCES ASYMPTOTIQUES

##### 4.1. Formulations analytiques

A l'aide des résultats établis dans la section précédente, nous pouvons dériver la forme du biais asymptotique relatif entre l'estimateur des MCO et celui des MCG à des fins de comparaison. Ce biais relatif s'écrit :

$$\frac{\text{biais}_{MCG}}{\text{biais}_{MCO}} = \frac{\sigma_{\bar{X}}^2}{\sigma_{\bar{X}^*}^2} \cdot \frac{\sigma_{\xi^*}^2}{\sigma_{\xi}^2} \quad (12)$$

La première partie de cette expression s'interprète comme la variance relative de la variable observée avant et après la transformation liée à la procédure des MCG. La seconde partie de cette expression s'interprète comme la variance relative de l'erreur de mesure avant et après la transformation liée à la procédure des MCG. Compte tenu de la structure du modèle, nous pouvons donner des formulations analytiques à chacun des éléments de l'expression (12).

On pose  $\mathcal{S}_X^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} X'X$  (l'existence de cette quantité est impliquée par l'hypothèse 4). On a alors :

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{X}}^2 &= p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (X + \xi)' (X + \xi) \\ &= p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} X'X + p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \xi' \xi \\ &= s_X^2 + p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} v' (I_n - \rho M_n')^{-1} (I_n - \rho M_n)^{-1} v \\ &= s_X^2 + \underbrace{\sigma_v^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{tr} \left[ (I_n - \rho M_n')^{-1} (I_n - \rho M_n)^{-1} \right]}_{:= \mathcal{S}_{MM}} \end{aligned} \quad (13)$$

Les calculs précédents impliquent que :

$$\sigma_{\xi}^2 = \sigma_v^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{tr} \left[ (I_n - \rho M_n')^{-1} (I_n - \rho M_n)^{-1} \right] = \sigma_v^2 \cdot \mathcal{S}_{MM} \quad (14)$$

De façon analogue, pour les variables transformées :

$$\begin{aligned}
\sigma_{X^*}^2 &= p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (X + \xi)' (I_n - \lambda W_n') (I_n - \lambda W_n) (X + \xi) \\
&= p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} X' (I_n - \lambda W_n') (I_n - \lambda W_n) X + p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \xi' (I_n - \lambda W_n') (I_n - \lambda W_n) \xi \\
&= p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} X' (I_n - \lambda W_n') (I_n - \lambda W_n) X \\
&\quad + p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} v' (I_n - \rho M_n')^{-1} (I_n - \lambda W_n') (I_n - \lambda W_n) (I_n - \rho M_n)^{-1} v \\
&= s_{X^*}^2 + \sigma_v^2 \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{tr} \left[ (I_n - \rho M_n')^{-1} (I_n - \lambda W_n') (I_n - \lambda W_n) (I_n - \rho M_n)^{-1} \right]}_{:= s_{MW}} \\
\text{et } \sigma_{\xi^*}^2 &= \sigma_v^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{tr} \left[ (I_n - \rho M_n')^{-1} (I_n - \lambda W_n') (I_n - \lambda W_n) (I_n - \rho M_n)^{-1} \right] = s_{MW} \quad (15)
\end{aligned}$$

Au final, le biais asymptotique relatif n'est déterminé que par les forces relatives de l'autocorrélation spatiale dans les erreurs de mesure et l'autocorrélation spatiale dans l'équation initiale.

La quantité  $s_{X^*}^2 = p \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} X' (I_n - \lambda W_n') (I_n - \lambda W_n) X$  est uniquement une fonction de la variance explicative et du paramètre de décalage spatial  $\lambda$ , tous deux étant connus. Il est possible de calculer l'équivalent de cette expression en échantillon fini. Supposons par exemple que les variables explicatives sont indépendantes entre observations, i.e.  $E(X_n X_n') = \sigma_{X,n}^2 I_n$ , alors :

$$\begin{aligned}
s_{X^*}^2 &= p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} X' (I_n - \lambda W_n') (I_n - \lambda W_n) X \\
&= p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{tr} \left[ X X' (I_n - \lambda W_n') (I_n - \lambda W_n) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{tr} \left[ E(X X') (I_n - \lambda W_n') (I_n - \lambda W_n) \right]
\end{aligned} \quad (17)$$

si les espérances et les  $p$ lim existent. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
s_{X^*}^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{X,n}^2}{n} \cdot \text{tr} \left[ (I_n - \lambda W_n') (I_n - \lambda W_n) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{X,n}^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{tr} \left[ (I_n - \lambda W_n') (I_n - \lambda W_n) \right] \\
&= s_X^2 \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{tr} \left[ (I_n - \lambda W_n') (I_n - \lambda W_n) \right]}_{:= s_{MW}}
\end{aligned} \quad (17)$$

Au final, le biais asymptotique relatif s'écrit :

$$\frac{\text{biais}_{MCG}}{\text{biais}_{MCO}} = \frac{s_x^2 + \sigma_v^2 \cdot s_{MM}}{s_x^2 \cdot s_{WW} + \sigma_v^2 \cdot s_{MW}} \cdot \frac{s_{MW}}{s_{MM}} \quad (18)$$

On est alors en mesure de calculer ce ratio pour différentes valeurs de  $\lambda$ ,  $\rho$  et du rapport signal-sur-bruit  $ssb = s_x^2 / \sigma_v^2$ .

Des calculs similaires nous permettent de calculer l'efficacité relative des deux estimateurs<sup>2</sup> :

$$\frac{\Omega_{MCG}}{\Omega_{MCO}} = \frac{ssb + 1 + 2s_{MW} + \frac{2}{ssb} (s_{MMMMMM} / s_{MM})}{(ssb + 2)(s_{W^{-1}W^{-1}} / s_{MM}) + 1} \quad (19)$$

où  $ssb$ ,  $s_{MW}$  et  $s_{MM}$  ont été définis précédemment et :

$$s_{MMMMMM} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{tr} \left[ \begin{aligned} & (I_n - \rho M'_n)^{-1} (I_n - \lambda W_n) (I_n - \rho M_n)^{-1} \\ & (I_n - \rho M'_n)^{-1} (I_n - \lambda W_n) (I_n - \rho M_n)^{-1} \end{aligned} \right] \quad (20a)$$

$$s_{W^{-1}W^{-1}} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{tr} \left[ (I_n - \lambda W_n)^{-1} (I_n - \lambda W_n)^{-1} \right] \quad (20a)$$

## 4.2. Représentations graphiques

Afin d'analyser le biais asymptotique relatif entre les deux estimateurs et l'efficacité asymptotique relative entre les deux estimateurs, nous avons calculé les expressions (18) et (19) pour différentes valeurs des paramètres.

Plus précisément, nous avons généré  $n = 400$  points dans un carré de côté unitaire, points dont les coordonnées suivent une loi uniforme. Sur la base de ces 400 points, nous avons ensuite construit une matrice de poids où les poids sont égaux à l'inverse de la distance au carré entre les points. Par souci de simplification, cette matrice de poids correspond à la fois à  $W_n$  et à  $M_n$ . Les expressions (18) et (19) ont ensuite été générées pour des valeurs de  $\lambda$  et  $\rho$  allant de 0,1 à 0,9 par incrément de 0,1 et pour deux valeurs du signal-sur-bruit ( $ssb$ ) : 10 et 50. Le premier cas correspond à une situation où la part de la variance provenant de la variable non observée est relativement peu importante par rapport à la variance provenant de l'erreur de mesure. Dans le second cas, la va-

<sup>2</sup> Pour des raisons de place, ces calculs ne sont pas reportés ici. Ils sont disponibles sur demande auprès des auteurs.

riance provenant de l'erreur de mesure est très faible par rapport à la variance provenant de la variable non observée.

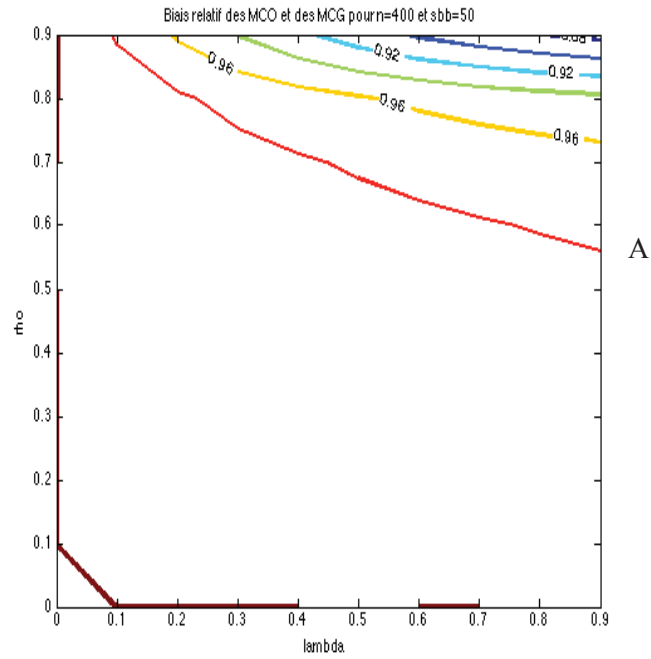
La Figure 1 représente toutes les courbes de niveau du biais relatif pour  $n = 400$ ,  $sbb = 50$  et pour toutes les valeurs possibles de  $\lambda$ , l'autocorrélation spatiale des erreurs de l'équation initiale, en abscisse et de  $\rho$ , l'autocorrélation spatiale de l'erreur de mesure, en ordonnée. La courbe A représente toutes les valeurs de  $\lambda$  et de  $\rho$  pour lesquelles le biais relatif est égal à 1, en d'autres termes il s'agit de toutes les situations pour lesquelles le biais de l'estimateur des MCO et celui des MCG sont égaux. Lorsque le signal-sur-bruit est important, il existe peu de combinaisons de valeurs de  $\lambda$  et de  $\rho$  pour lesquelles le biais relatif est unitaire. Pour toutes les autres valeurs (autres courbes que A), le biais de l'estimateur des MCG est inférieur à celui des MCO mais la différence est faible dans la mesure où les autres courbes de niveau représentent des valeurs de 98%, 96%, 94%, 92% et 90%. Ainsi, dans un modèle avec autocorrélation spatiale des erreurs et erreurs de mesure, ne corriger que l'autocorrélation spatiale *via* une estimation par les MCG n'est en mesure que de réduire légèrement le biais de l'estimateur. Rappelons en outre qu'il s'agit de l'estimateur des MCG, pour lequel on suppose  $\lambda$  connu, alors qu'en pratique, il faudrait également estimer ce paramètre.

La Figure 2 représente le biais relatif pour un signal-sur-bruit plus faible,  $sbb = 10$ , correspondant au cas où l'erreur de mesure sur la variable expliquée est importante. Dans ce cas, les combinaisons de paramètres de  $\lambda$  et de  $\rho$  pour lesquelles le biais de l'estimateur des MCG est moins important que celui des MCO sont plus nombreuses.

Cette situation est inverse dès lors qu'on considère l'efficacité relative entre les deux estimateurs (Figures 3 et 4). Lorsque le signal-sur-bruit est important (Figure 3), il existe des combinaisons de paramètres pour lesquelles l'estimateur des MCG est moins efficace que l'estimateur des MCO (courbes B et C pour des niveaux de 1,05 et 1,1). Il s'agit de cas où il existe une forte autocorrélation spatiale dans l'erreur de mesure. Lorsque le signal-sur-bruit diminue (Figure 4), l'estimateur des MCG voit les cas dans lesquels il est plus efficace que l'estimateur des MCO se réduire fortement. La courbe de niveau unitaire, centrale dans la Figure 3, se décale en effet vers la droite dans la Figure 4.

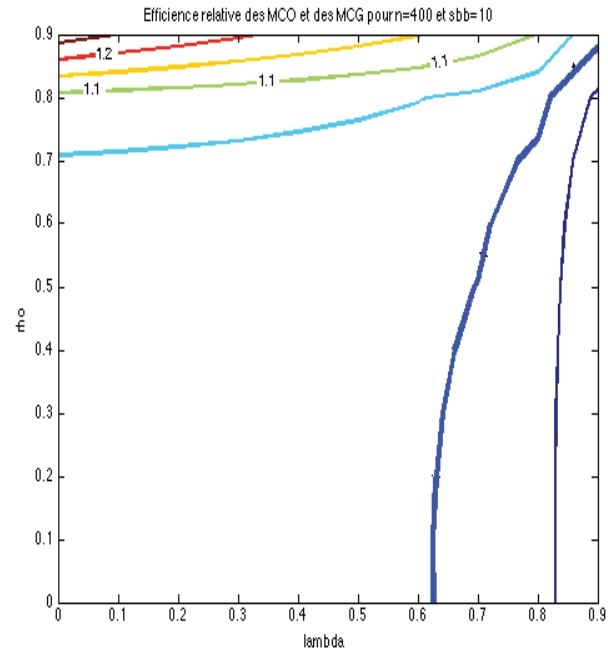
En d'autres termes, nombreuses sont les combinaisons de paramètres entre  $\lambda$  et de  $\rho$  pour lesquelles l'estimateur des MCO est plus efficace que celui des MCG. Au final, ces représentations graphiques illustrent un arbitrage entre le biais et la variance : on peut essayer de réduire le biais en corrigeant par l'autocorrélation spatiale au prix d'une réduction de l'efficacité de l'estimateur.

**Figure 1**

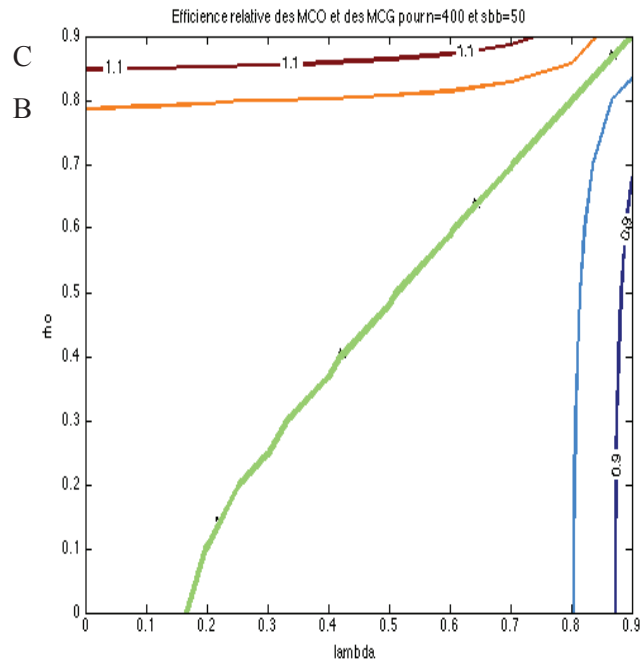


A

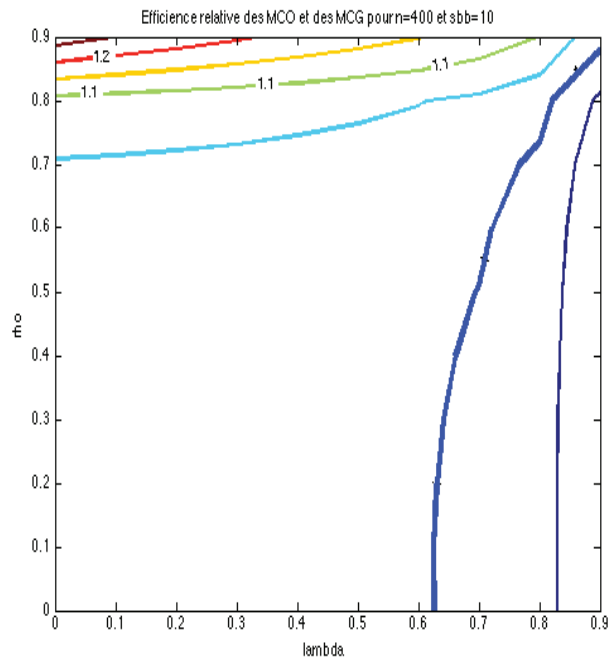
**Figure 2**



**Figure 3**



**Figure 4**



#### 4. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons dérivé les distributions asymptotiques de l'estimateur des MCO et de l'estimateur des MCG purs dans un modèle comportant une autocorrélation spatiale des erreurs et une erreur de mesure affectant la variable explicative. Nous avons également dérivé la forme du biais asymptotique relatif et de l'efficacité asymptotique relative compte tenu de la structure du modèle. Ceci nous a permis de montrer que la présence simultanée de l'autocorrélation spatiale et d'une erreur de mesure sur la variable explicative conduit à un arbitrage entre le biais et la variance. Une estimation par les MCG permet de réduire le biais mais de façon très limitée. Cependant, il existe de nombreuses combinaisons de paramètres pour lesquelles cette réduction du biais se fait au détriment d'une perte d'efficacité.

Les interactions entre autocorrélation spatiale et erreurs de mesure sont ainsi complexes et méritent des recherches supplémentaires. Il serait ainsi intéressant de mener le même type d'analyse lorsque l'autocorrélation spatiale prend la forme d'une variable endogène décalée pour analyser les propriétés d'une estimation par les variables instrumentales. Plus généralement, il est nécessaire de se poser la question d'une méthode d'estimation convergente en présence d'autocorrélation spatiale et d'une erreur de mesure. Une voie possible serait de se baser sur les moments de second ordre d'une autre variable explicative dans le cadre de systèmes triangulaires, comme suggéré par Lewbel (2012) dans un cadre a-spatial.

#### REFERENCES

- Arbia G., 2014, *A Primer for Spatial Econometrics with Applications in R*, Palgrave Mac Millan.
- Anselin L., 1988, *Spatial Econometrics: Methods and Models*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- Dagenais M., 1994, "Parameter estimation in regression models with errors in the variables and autocorrelated disturbances", *Journal of Econometrics*, 64, pp. 145-163.
- Drukker D.M., Egger P., Prucha I.R., 2013, "On two-step estimation of a spatial autoregressive model with autoregressive disturbances and endogenous regressors", *Econometric Reviews*, 32, pp. 686-733.
- Dubé J., Legros D., 2014, *Econométrie spatiale appliquée des microdonnées*, ISTE editions.
- Elhorst J.P., 2014, *Spatial Econometrics: From Cross-sectional Data to Spatial Panels*, Berlin: Springer-Verlag.
- Fingleton B., Le Gallo J., 2007, "Finite sample properties of estimators of spatial models with autoregressive, or moving average, disturbances and system feedback", *Annales d'Economie et de Statistique*, 87-88, pp. 39-62.

- Fingleton B., Le Gallo J., 2008, "Estimating spatial models with endogenous variables, a spatial lag and spatially dependent disturbances : finite sample properties", *Papers in Regional Science*, 87, pp. 319-339.
- Fischer M.M, Nijkamp P. (Eds.), 2014, *Handbook of Regional Science*, Berlin: Springer-Verlag.
- Greene W.H., 2011, *Econometric Analysis*, 7th Edition, Pearson.
- Jin F., Lee L.-F., 2013, "Generalized spatial two stage least squares estimation of spatial autoregressive models with autoregressive disturbances in the presence of endogenous regressors and many instruments", *Econometrics*, 1, pp. 71-114.
- Kelejian H.H., Prucha I.-R., 1999, "A generalized moments estimator for the autoregressive parameter in a spatial model", *International Economic Review*, 40, pp. 509-533.
- Le Gallo J., 2002, "Econométrie spatiale : l'autocorrélation spatiale dans les modèles de régression linéaire", *Economie et Prévision*, 155, pp. 139-158.
- Le Gallo J., 2014, "Cross-section spatial regression models", in Fischer M.M., Nijkamp P. (Eds.), *Handbook of Regional Science*, Springer-Verlag, pp. 1511-1533.
- Le Gallo J., Fingleton B., 2012, "Measurement errors in a spatial context", *Regional Science and Urban Economics*, 42, pp. 114-125.
- LeSage J., Pace K.P., 2009, *Introduction to Spatial Econometrics*, CRC Press.
- Lewbel A., 2012, "Using heteroscedasticity to identify and estimate mis-measured and endogenous regressor models", *Journal of Business and Economic Statistics*, 30, pp. 67-80.
- Liu X., Lee L.-F., 2013, "Two-stage least squares estimation of spatial autoregressive models with endogenous regressors and many instruments", *Econometric Reviews*, 32, pp. 734-753.

#### **SPATIAL ERROR AUTOCORRELATION AND MEASUREMENT ERRORS: HOW DO THEY INTERACT?**

**Abstract** - In this paper, we derive the asymptotic distributions of the Ordinary Least Squares and the (unfeasible) Generalized Least Squares estimators in a spatial error model with measurement error on an explanatory variable. We specify analytically the forms of the relative asymptotic bias and the relative asymptotic efficiency between the two estimators given the structure of the model. This allows showing that the joint presence of spatial autocorrelation and measurement error leads a bias-efficiency trade-off. Estimation with GLS allows decreasing the bias but in a limited way. However, there exists a high number of parameter combinations for which this reduction of the bias comes at the cost of an efficiency loss.

**Key-words** - SPATIAL AUTOCORRELATION, MEASUREMENT ERRORS, LARGE SAMPLE RESULTS